

---

# Fourieroptik

*Versuchsausarbeitung im Rahmen des Fortgeschrittenen  
Praktikums der Heinrich Heine Universität Düsseldorf, vorgelegt  
von Marcus Neuer.*

## 1 Theoretische Grundlagen

### 1.1 Auszüge aus der Beugungstheorie

Unter dem Begriff "Beugung" versteht man die teilweise Ablenkung von Lichtstrahlen aus ihrer ursprünglichen Richtung, wie sie z.B. an den Kanten von nicht transmittierenden Materialien beobachtbar ist. Ein solcher Effekt ist nicht durch die geometrische Optik beschreibbar, sondern wird erst im Modell der Wellenoptik erfaßbar.

Obiges Problem wird klarer, wenn man das *Huygenssche* Prinzip heranzieht, das besagt, daß jeder Punkt einer Wellenfront, Quelle von kugelförmigen Elementarwellen ist. In dieser Vorstellung führt die Einhüllende aller Elementarwellen auf die Gesamtfront. Nach einem Hindernis muß jedoch auch die Interferenz beachtet werden, da die Amplitude durch die Überlagerung aller Elementarwellen gegeben ist. Das *Fresnel-Huygens*-Prinzip faßt sowohl das Interferenzkonzept als auch die Elementarwellenanschauung zusammen.



Christiaan Huyghens  
1629-1695

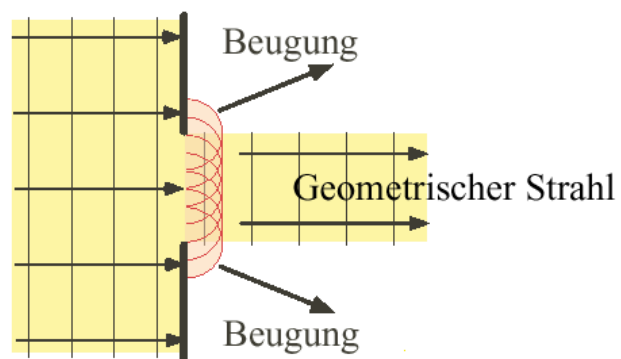


Abb.1 Huyghenssches Prinzip

Das *Kirchhoffsche-Beugungsintegral* stellt die mathematische Darstellung des Fresnel-Huygens-Prinzip dar. Es ist aus den Maxwellgleichungen herleitbar und gibt die Feldverteilung  $E(x', y', z)$  im Abstand zu Beugungsfigur bei  $z=0$  an,

$$E(x', y', z) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_r) dx dy, \quad (1)$$

wobei der Term  $\frac{e^{ikr}}{r}$  die Kugelwellen beschreibt, und  $\cos(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_r)$  den Kosinus zwischen dem Einheitsvektor der Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle, und dem Einheitsvektor von  $\mathbf{r}$  meint.

Betrachtet man eine beugende Struktur, so gibt es zwei unterschiedliche Bereiche hinter der Struktur von besonderem Interesse. Direkt hinter der Struktur überlagern sich Elementarwellen der verschiedensten Ausbreitungsrichtungen. In diesem Bereich erhält man *Fresnelbeugung*.

Im *Fernfeld* sind die sich überlagernden Wellen fast eben, und die dort zu beobachtende Beugungsform heißt *Fraunhoferbeugung*. Um sie dreht sich der vorliegende Versuch.

Im folgenden wird gezeigt, daß zwischen den Beugungsarten und der Fouriertransformierten ein Zusammenhang besteht.

## 1.2 Fourierentwicklung

Nach dem Fouriertheorem läßt sich jede periodische Funktion  $f$  als Summe der trigonometrischen Funktionen darstellen. Zusätzlich muß  $f$  integrierbar sein. Formal schreibt sich  $f$  dann als,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{a_m \cos(mkx) + b_m \sin(mkx)\}. \quad (2)$$

Wenn man sich  $f$  als eine Überlagerung mehrerer Frequenzen vorstellt, so ist (2) anschaulich rückwertige Sortierung und Zerlegung in die spektralen Komponenten. Im Zentrum der Fourieranalyse stehen die Fourierfaktoren  $a_i, b_i$ , die angeben, wie stark die  $i$ -te Spektralkomponente gewichtet ist. Wir ermitteln  $a_0$ , indem wir über eine Wellenlänge integrieren, dabei fallen alle Beiträge in denen  $\sin$  oder  $\cos$  vorkommt weg,

$$\int_0^{\lambda} f(x) dx = \int_0^{\lambda} a_0/2 dx + 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) dx. \quad (3)$$

Multipliziert man beide Seiten von (2) jeweils mit  $\cos(mkx)$ , bzw. mit  $\sin(mkx)$ , und integriert wieder, so folgen unter Anwendung der Orthogonalitätsbedingungen,

$$\int_0^{\lambda} \sin(mkx) \cos(nkx) dx = 0; \quad \int_0^{\lambda} \sin(mkx) \sin(nkx) dx = \frac{\lambda}{2} \delta_{m,n}$$

$$\text{und } \int_0^{\lambda} \cos(mkx) \cos(nkx) dx = \frac{\lambda}{2} \delta_{m,n},$$

die weiteren Koeffizienten,

$$a_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos(mkx) dx \quad (4)$$

$$b_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \sin(mkx) dx. \quad (5)$$

Im komplexen vereinfacht sich die Fourierreihe, weil nur noch ein Koeffizient berücksichtigt werden muß.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{imkx} \quad (6)$$

Die Koeffizienten sind durch

$$c_m = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) e^{-im \frac{2\pi}{\lambda} x} dx \quad (7)$$

bestimmt. Wie oben bereits erwähnt sind die Fourierkoeffizienten Gewichtungsfaktoren, die die jeweilige Oberschwingung hervorheben. Werden die Koeffizienten  $c_m(mk)$  gegen  $m \cdot k$  aufgetragen, so erhält man das Raumfrequenzspek-

trum. Für die Reihenentwicklung (6) ist dies ein Strichspektrum, da nur bei diskreten Werten  $m$ - $k$  Oberschwingungsamplituden vorkommen.

## 1.3 Fouriertransformierte

Bei nichtperiodischen Funktionen werden die diskreten  $k$ -Werte in eine kontinuierliche Verteilung überführt. Damit werden die Vorfaktoren  $c_m$  jetzt zu einer Funktion die von  $k$  abhängt,

$$c_m \mapsto c(k).$$

Diese Funktion stellt nun eine Verallgemeinerung der obigen Reihenentwicklung dar, d.h. wir können  $f(x)$  darstellen als

$$f(x) = \zeta \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk \longleftrightarrow c(k) = \zeta' \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (8)$$

Die Funktion  $c(k)$  heißt Fouriertransformierte von  $f(x)$ . Die Faktoren  $\zeta$  und  $\zeta'$  sind je nach Konvention verschieden, und werden im folgenden nicht explizit angegeben, was im Einklang mit der Begleitliteratur steht.

Wir definieren die Fouriertransformation kurz als,

$$f(x) \longleftrightarrow \mathcal{F}[f(x)].$$

Für die Feldverteilung in der  $x$ - $y$ -Ebene kann die Fouriertransformierte sofort angegeben werden,

$$E(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (9)$$

## 1.4 Fourieroptik

### 1.4.1 Fresnel-Näherung

Weil das Kirchhoff Integral nicht ohne weiteres zu lösen ist, werden Näherungen notwendig. In der Fresnelnäherung werden nur zur  $z$ -Achse fast parallele Strahlen einbezogen. Dann ist,

$$\cos(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_r) \approx 1, \quad (10)$$

und wir können die Radiusformel nach  $z$  entwickeln,

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2}$$

$$\approx z + \frac{(x' - x)^2}{2z} + \frac{(y' - y)^2}{2z}.$$

Setzt man diese Vereinfachungen ins Kirchhoff Integral ein, so erhält man ein neues Integral,

$$E(x', y', z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) e^{i\frac{ik}{2z} (x'-x)^2 + (y'-y)^2} dx dy. \quad (11)$$

An dieser Stelle läßt sich bereits die Fouriertransformierte erkennen, durch eine Umformung wird sie noch ersichtlicher,

$$E(x', y', z) = A(x', y', z) \cdot$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \cdot e^{i\frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z} (x'x + y'y)} dx dy,$$

mit

$$A(x', y', z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} (x'^2 + y'^2)}.$$

In Kurzschreibweise lautet die Fresnelnäherung dann,

$$E(x', y', z) = A(x', y', z) \cdot \mathcal{F} \left[ E(x, y) \cdot e^{i\frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)} \right]_{(v_x, v_y)}, \quad (12)$$

Wobei die Fouriertransformierte in Abhängigkeit von den Raumfrequenzen gebildet wird,

$$v_x = \frac{x'}{\lambda z} ; \quad v_y = \frac{y'}{\lambda z}.$$

#### 1.4.2 Fraunhofernäherung

Der Fraunhoferbereich ist als ein Bereich definiert, der in weitem Abstand zur Beugungsstruktur ist. Es liegen endlich dimensionierte Beugungsstrukturen in x und y Richtung vor, und eine große Distanz z. Damit gilt,

$$z \gg (x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{i\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \approx 0$$

$$\Rightarrow \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] \approx 1,$$

und die Integration vereinfacht sich weiter,

$$E(x', y', z) = A(x', y', z) \cdot \mathcal{F}[E(x, y)]_{(v_x, v_y)}. \quad (13)$$

Die Feldverteilung in der Fraunhofernäherung wird durch die Fouriertransformierte der Spaltfunktion festgelegt. Die Intensität verhält sich gemäß  $I \sim |E|^2$ ,

$$I = \frac{1}{\lambda^2 z^2} \left| \mathcal{F}[E(x, y)] \right|^2 \quad (14)$$

### 1.4.3 Punktlichtquelle und ebene Welle

Die Punktlichtquelle kann als einfachste Beugungsstruktur angesehen werden. Sie wird durch eine  $\delta$ -Funktion beschrieben,

$$E(x, y) = E_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (15)$$

Die Fouriertransformierte ist in diesem Fall leicht zu bestimmen, da nur eine Integration über die  $\delta$ -Funktionen ausgeführt werden muß,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[E(x, y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) e^{[-\frac{2i\pi}{\lambda z} (x'x + y'y)]} dx dy \\ &= E_0 e^{[-\frac{2i\pi}{\lambda z} x_0^2 + y_0^2]}. \end{aligned} \quad (16)$$

Die Punktlichtquelle transformiert sich in eine ebene Welle. Die ebene Welle transformiert sich in eine Punktlichtquelle, denn das ist ersichtlich aus der Definition der  $\delta$ -Funktion,

$$\begin{aligned} E(x, y) &= E_0 \\ \mathcal{F}[E(x, y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0 e^{[-2i\pi(v_x x + v_y y)]} dx dy \\ &= E_0 \delta(v_x) \delta(v_y). \end{aligned} \quad (17)$$

### 1.4.4 Der $\infty$ -lange Spalt

Der  $\infty$ -lange,  $\infty$ -dünne Spalt (hier in  $y$ -Richtung) läßt sich ebenfalls durch eine  $\delta$ -Funktion darstellen,

$$E(x, y) = E_0 \delta(x - x_0) \quad (18)$$

Die Fouriertransformierte dieser Feldverteilung lautet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[E(x, y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \delta(x - x_0) e^{[-\frac{2i\pi}{\lambda z} (x'x + y'y)]} dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E_0 e^{[-2i\pi v_y y]} dy \delta(x) = E_0 \delta(v_y)
\end{aligned} \tag{19}$$

woraus folgt, daß der  $\infty$ -lange Spalt in der Beugungsebene um  $90^\circ$  gedreht dargestellt wird.

#### 1.4.5 Das einseitig $\infty$ -lange aber endlich dicke Rechteck

Da ein  $\infty$ -langer und  $\infty$ -dünner Spalt in der Realität nicht ohne weiteres realisierbar ist, beschreiben wir Spalte besser durch Rechtecke. Das Rechteck habe die Breite  $a$ . Eine solche Struktur kann mit der Funktion  $\text{rect}(x)$  beschrieben werden,

$$E(x, y) = E_0 \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = E_0 \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } |x| < \frac{a}{2} \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right\}. \tag{20}$$

Auch hier kann die Integration analytisch durchgeführt werden,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[E(x, y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a/2}^{a/2} E_0 e^{[-\frac{2i\pi}{\lambda z} (x'x + y'y)]} dx dy \\
&= E_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{[-2i\pi v_x x]} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{[-2i\pi v_y y]} dy \\
&= E_0 \delta(v_y) \frac{1}{2\pi i v_x} \left( e^{-2\pi i v_x \frac{a}{2}} - e^{2\pi i v_x \frac{a}{2}} \right) \\
&= E_0 \delta(v_y) \text{sinc}(\pi v_x a).
\end{aligned} \tag{21}$$

Hier wurde direkt eine weitere Hilfsfunktion eingeführt, die sinc-Funktion,

$$\text{sinc}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{22}$$

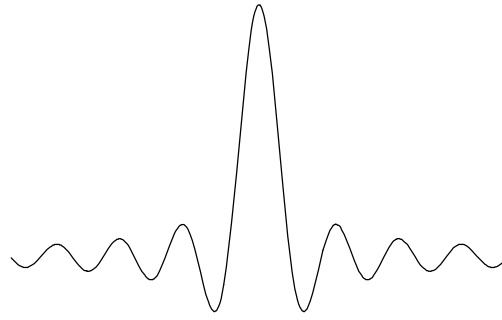


Abb.2 Skizze der sinc-Funktion

### 1.4.6 Lochblende

Wir betrachten nun eine Lochblende die durch die Funktion,

$$E(r, \vartheta) = E_0 \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } r \leq a \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right\}, \quad (23)$$

gegeben ist. Aufgrund der Symmetrie wurde der Ansatz bereits für eine Integration in Polarkoordinaten aufgestellt. Dabei gelten die Transformationen,

$$x = r \cos \vartheta; \quad y = r \sin \vartheta; \quad v_x = v \cos \varphi; \quad v_y = v \sin \varphi,$$

mit dem Winkel  $\vartheta$  im Koordinatensystem der Spaltfunktion, und dem Winkel  $\varphi$  im System der Raumfrequenzen, anschaulich auf dem Darstellungsschirm des Beugungsbildes.

Das zu lösende Integral lautet schließlich,

$$\mathcal{F}[E(x, y)] = E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-2\pi i (r \cos \vartheta v \cos \varphi + r \sin \vartheta v \sin \varphi)} r \, dr \, d\vartheta \quad (24)$$

unter Anwendung eines Additionstheorems,

$$\cos(\vartheta - \varphi) = \cos \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi$$

wird (24) zu,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[E(x, y)] &= E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-2\pi i v r \cos(\vartheta - \varphi)} r \, dr \, d\vartheta \\ &= 2\pi E_0 \int_0^a r J_0(-2\pi v r) \, dr. \end{aligned}$$

In diesem Schritt wurde die Besselfunktion  $J_0$  benutzt, deren Integration auf die Funktion  $J_1$  führt, gemäß der Eigenschaften der Besselfunktionen,

$$\mathcal{F}[E(x, y)](\nu, \varphi) = \frac{E_0 a}{\nu} J_1(2\pi\nu a) \quad (25)$$

und nach Rückführung auf die herkömmlichen Koordinaten

$$\mathcal{F}[E(x, y)](\nu_x, \nu_y) = \frac{E_0 a}{\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}} J_1\left(2\pi a \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}\right). \quad (26)$$

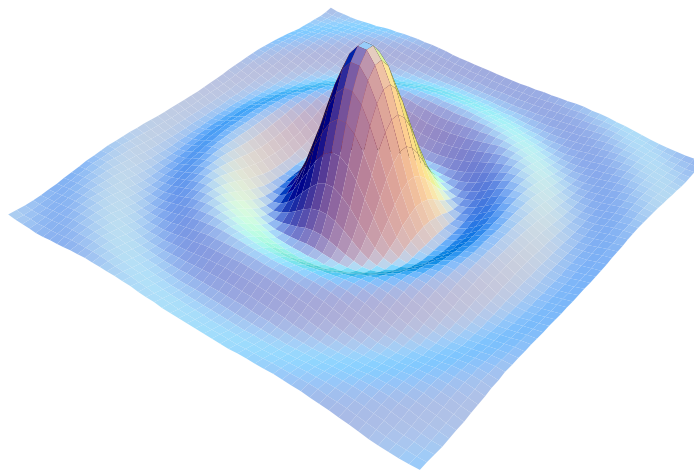


Abb.2 Feldverteilung der Lochblende im  $E(\nu_x, \nu_y)$  Diagramm

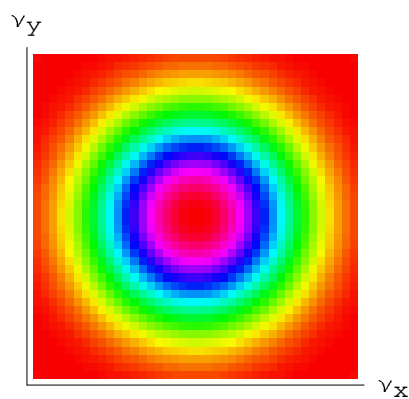
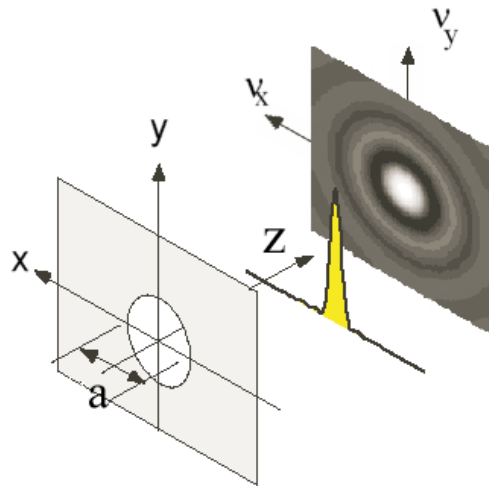


Abb.3 Intensitätsverteilung auf der  $\nu_x, \nu_y$  Ebene des Beugungsschirms



## 1.5 Fourieroptik kombinatorischer Strukturen

In 1.4 wurden die Fouriertransformierten einiger einfacher Strukturen ausgerechnet. Da komplexe Strukturen meist zurückführbar auf die oben besprochenen Grundfiguren sind, liegt es nahe einige Sätze der Fouriertheorie heranzuziehen, um das Zusammenspiel von Einzelfunktionen zu verstehen.

Die nun folgenden Sätze werden später wieder aufgegriffen und im Experiment verifiziert.

### 1.5.1 Verschiebungssatz

Verschiebungen der beugenden Struktur in  $x$  und  $y$  Richtung verursachen lineare Phasenverschiebungen.

$$\mathcal{F}[E(x + \Delta x, y + \Delta y)](v_x, v_y) = e^{2\pi i(v_x \Delta x + v_y \Delta y)} \mathcal{F}[E(x, y)](v_x, v_y) \quad (27)$$

### 1.5.2 Ähnlichkeitssatz

Vergrößert man die Beugungsstruktur so zieht dies eine Verkleinerung der Fouriertransformierten nach sich,

$$\mathcal{F}[E(ax, by)](v_x, v_y) = \frac{1}{|a| |b|} \mathcal{F}[E(x, y)]\left(\frac{v_x}{a}, \frac{v_y}{b}\right). \quad (28)$$

### 1.5.3 Faltungssatz

Der Faltungssatz ist das mächtigste Werkzeug um zusammengesetzte Strukturen beschreiben zu können.

$$\mathcal{F}[E_1(x, y) \cdot E_2(x, y)](v_x, v_y) = \mathcal{F}[E_1(x, y)] * \mathcal{F}[E_2(x, y)] \quad (29)$$

Anschaulich bedeutet dies, daß wir zusammengesetzte Beugungsstrukturen in ihre Einzelfunktionen auflösen können, und deren Fouriertransformierte dann berechnen können. So kann der Doppelspalt z.B. in einen Spalt, und zwei  $\delta$ -Funktionen aufgespalten werden.

### 1.6 Optische Manipulationen

Mit Manipulationen innerhalb der Beugungsebene können bestimmte Beugungsordnungen aus dem Beugungslicht entfernen. Durch Rücktransformation wird dann ersichtlich, wie sich die Manipulation ausgewirkt hat.

Allgemeiner Aufbau des Experiments

