

Marcus Neuer

Einführung in die Relativitätstheorie

Mit Abbildungen und Texten von Claus Lämmerzahl

Prolog. Erste Grundbegriffe

1. Erste Grundlagen

Teil 1. Die Spezielle Relativitätstheorie

2. Die Lorentztransformation

3. Der Minkowski-Raum

4. Tensoren im Minkowski-Raum*

5. Konsequenzen der Lorentztransformation

6. Relativistische Mechanik

7. Relativistische Formulierung Elektrodynamik

8. Relativistische Quantenmechanik*

Teil 2. Allgemeine Relativitätstheorie

9. Gravitation und Kovarianzprinzip*

10. Tensoren im Riemanschen Raum**

11. Einsteinsche Feldgleichungen**

12. Abschließende Beispiele*

Prolog. Erste Grundbegriffe

1. Erste Grundbegriffe

1.1 Definitionen

Bezugssystem **Koordinatensystem** bei dem die Koordinaten durch Meßwerte (*Uhren* und *Maßstäbe*) realisiert sind.

Trägheit = Inertheit lat. iners „*träge, unbeteiligt*“

Inertialsystem **Bezugssystem** in dem ein Körper im Zustand der geradlinigen Bewegung verbleibt, solange keine Kräfte auf ihn wirken.

1. Erste Grundbegriffe

1.2 Die Newtonschen Axiome (historisch aus „*Lex quarta*“)

0 Es gibt **Inertialsysteme**.

Die **absolute**, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und ist ihrer Natur nach **gleichförmig** und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand.

1 Ein kräftefreier Massepunkt bewegt sich im Inertialsystem **geradlinig-gleichförmig**.

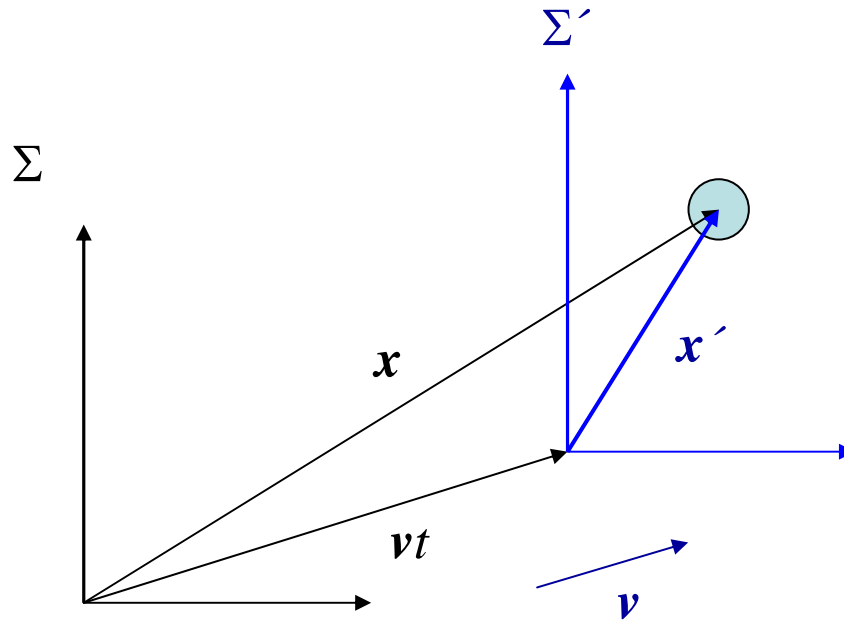
2 Die Kraft auf einen Massepunkt im Inertialsystem ist $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$.

3 Actio = Reactio.

4 Kräfte addieren sich vektoriell.

1. Erste Grundbegriffe

1.3 Die (einfache) Galilei-Transformation

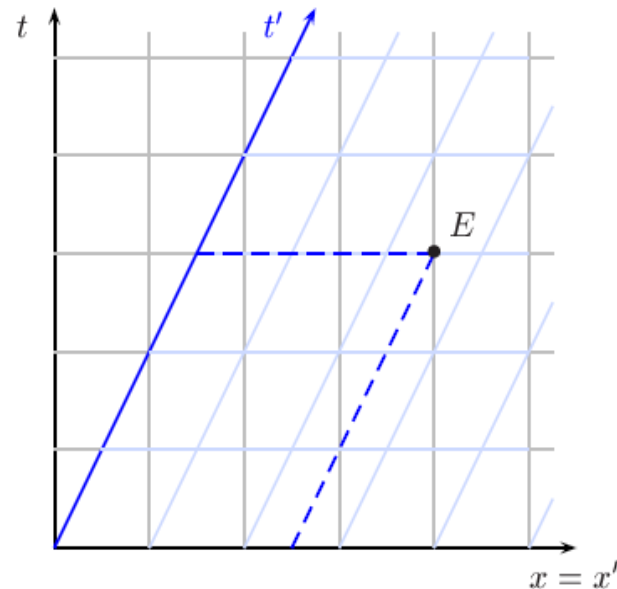
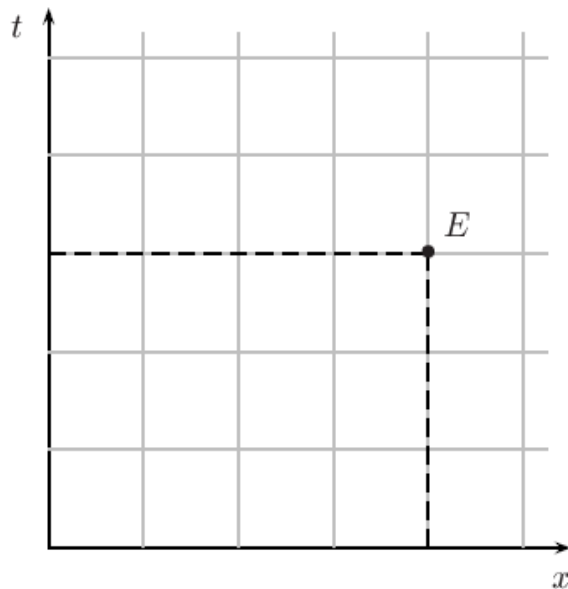


1. Erste Grundbegriffe

1.3 Die (einfache) Galilei-Transformation

$$x' = x - vt$$
$$t' = t$$

$$x' = 0$$
$$t'(x) = \frac{1}{v} x$$



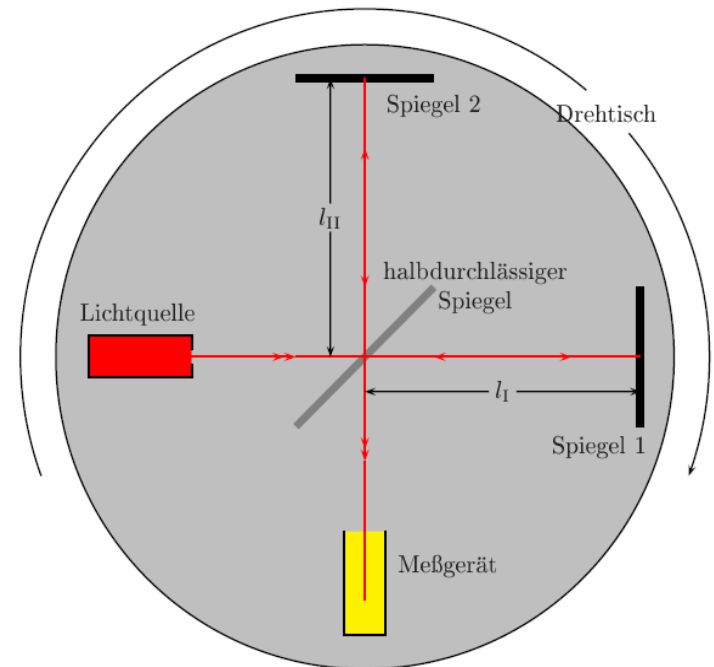
1. Erste Grundbegriffe

1.3 Die (einfache) Galilei-Transformation

Stimmt diese Transformation, so gilt:

$$u' = u + v$$

Die Überprüfung mit dem
Michelson-Morley-Experiment
ergab, dass dies **nicht** stimmt.



1. Erste Grundbegriffe

1.5 Die Lorentztransformation

Eine neue Transformation gibt den Sachverhalt richtig wieder...

$$x' = \gamma(x - vt) \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Die theoretische Begründung für die Verwendung der Lorentztransformation und ihre Auswirkungen auf die Teilgebiete der Physik heißt **Spezielle Relativitätstheorie**.

Teil 1. Die Spezielle Relativitätstheorie

2. Die Lorentztransformation

2.1 Postulate der Speziellen Relativitätstheorie

Relativitätsprinzip Die Naturgesetze haben in jedem Inertialsystem dieselbe Form. Sie sind **forminvariant** oder **kovariant**.

Postulat 1 Die Lichtgeschwindigkeit sei in allen Inertialsystemen gleich.
(Es existiere eine Geschwindigkeit c , die in allen Inertialsystem gleich sei.)

Postulat 2 Es gelte das Relativitätsprinzip.

2. Die Lorentztransformation

2.2 Die Bestimmungsgleichung der Lorentztransformation

$$c^2 = \frac{(d\mathbf{x})^2}{(dt)^2} \longrightarrow 0 = c^2(dt)^2 - (d\mathbf{x})^2 \longrightarrow 0 = \eta_{ab} dx^a dx^b$$

Vierer-Vektor:

$$dx^a \leftrightarrow \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Zeit
Raum

Metrischer Tensor:

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

2. Die Lorentztransformation

2.2 Die Bestimmungsgleichung der Lorentztransformation

$$\Sigma$$

$$c^2 = \frac{(d\mathbf{x})^2}{(dt)^2}$$

$$0 = \eta_{ab} dx^a dx^b$$

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a(x)}{\partial x^b} dx^b$$

Lorentztransformation



Postulat 1

c sei in allen
Systemen gleich!

$$\Sigma'$$

$$c^2 = \frac{(d\mathbf{x}')^2}{(dt')^2}$$

$$0 = \eta_{ab} dx'^a dx'^b$$

$$\eta_{cd} \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} = \eta_{ab}$$

2. Die Lorentztransformation

2.2 Die Bestimmungsgleichung der Lorentztransformation

Lineare Transformation (hier ohne Verschiebung):

$$\eta_{cd} \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} = \eta_{ab}$$

Forderung wegen
Postulat 2!

$$x'^a = L^a_b x^b$$

$$\eta_{cd} L^c_a L^d_b = \eta_{ab}$$

(L1)

Jede Transformation die eben diese Bedingung erfüllt heißt
Lorentztransformation.

2. Die Lorentztransformation

2.3 Ausgesuchte Eigenschaften

Die Lorentztransformationen bilden eine Gruppe (ohne Beweis)

i) die inverse Transformation ist

$$(L^{-1})^a{}_b = \eta^{ac} L^d{}_c \eta_{db}$$

ii) inverse Transformationen sind auch Lorentztransformationen.

iii) die Gruppe der L-Transformationen ist eine Lie-Gruppe.

2. Die Lorentztransformation

2.4 Die „reine“ Lorentz-Geschwindigkeits-Transformation

$$L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \mathbf{v}^T \\ -\gamma \mathbf{v} & 1 + \frac{\gamma^2}{1-\gamma} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (\text{L2a})$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \mathbf{x} \right)$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})}{v^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} t \quad (\text{L2b})$$

Überprüfen: $L(\mathbf{v})$ in Bedingungsgleichung (L1) einsetzen.

2. Die Lorentztransformation

2.4 Die „reine“ Lorentz-Geschwindigkeits-Transformation

Vereinfachen auf 2 Dimensionen t und x führt zu

$$x' = \gamma(x - vt) \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (\text{L3})$$

3. Der Minkowski-Raum

3.1 Invariantes Wegelement

Das Wegelement ds des **Minkowski-Raums** ist definiert als

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

und ist **invariant** unter L-Transformationen.

3. Der Minkowski-Raum

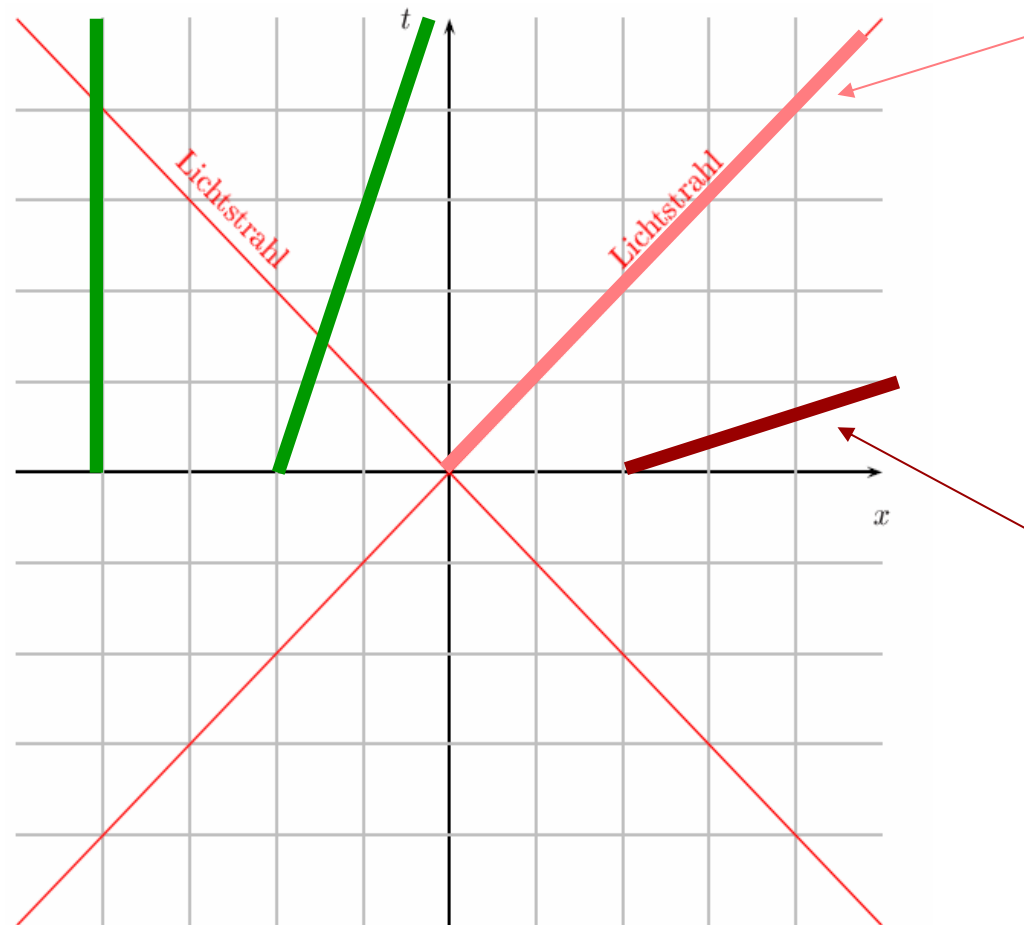
3.2 Das Minkowski-Diagramm

$c = 1$

$\tan \alpha = v$

$x' = \gamma(x - vt)$

$t' = \gamma(t - vx)$

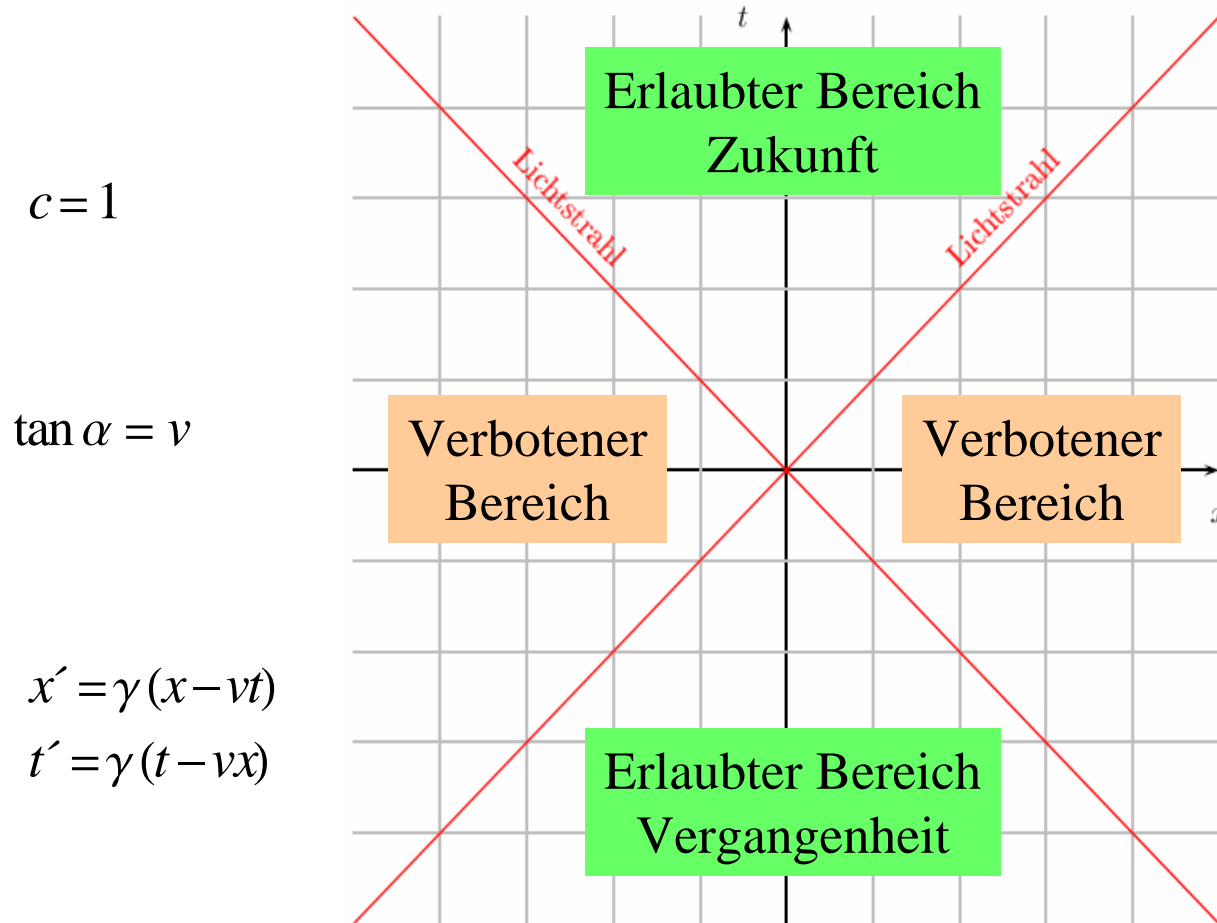


Photonen

Tachyonen*

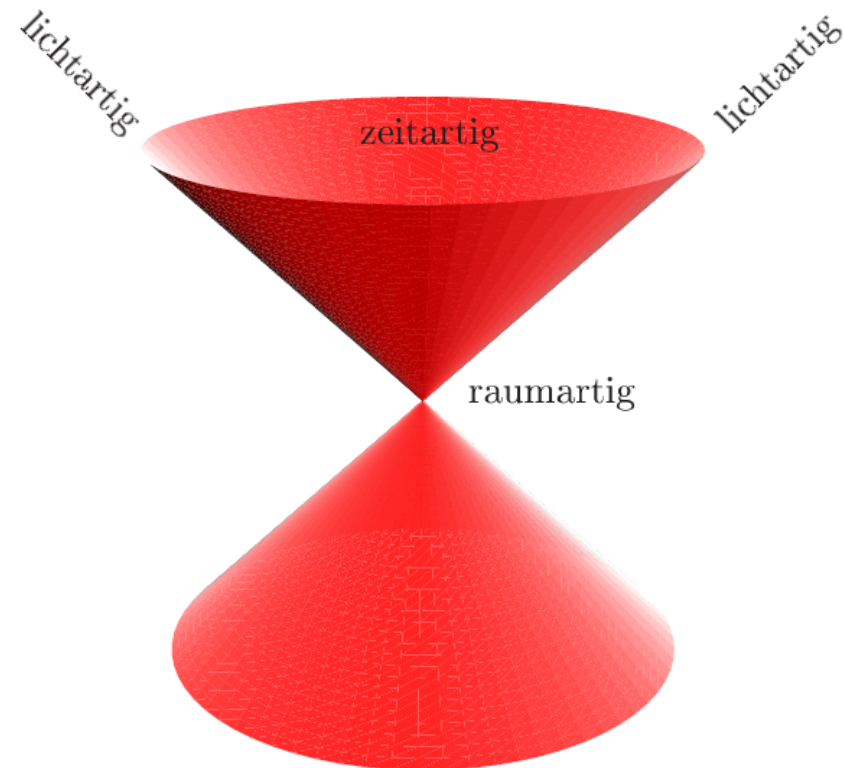
3. Der Minkowski-Raum

3.2 Das Minkowski-Diagramm



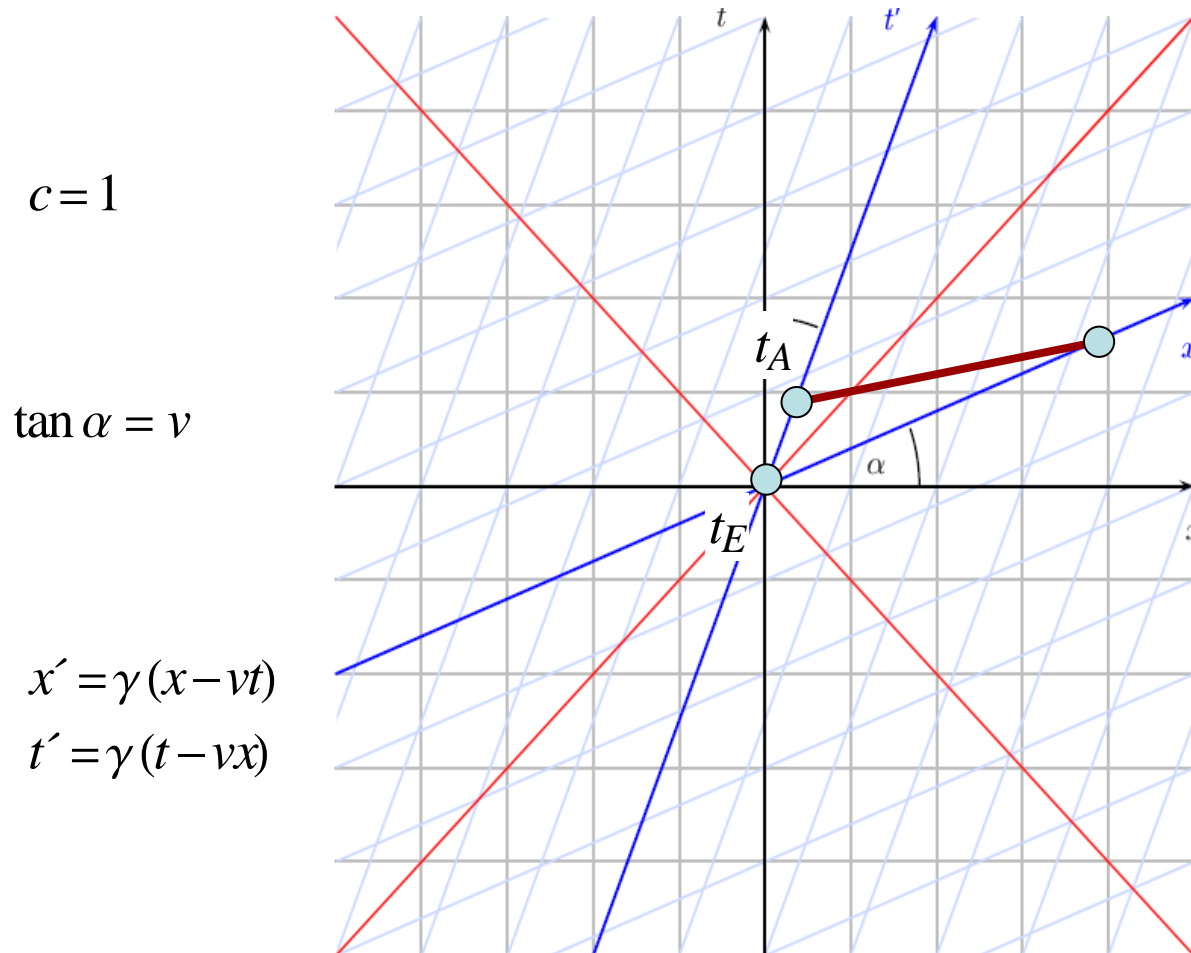
3. Der Minkowski-Raum

3.2 Das Minkowski-Diagramm



3. Der Minkowski-Raum

3.3 Die Lorentztransformation im Minkowski-Diagramm



$v > c$
 $\Rightarrow \exists \Sigma' \text{ mit } t_E < t_A$

**Verletzung
 der Kausalität!**

3. Der Minkowski-Raum

3.5 Zusammenfassung: Die Prinzipien der SRT

Relativitätsprinzip Alle Naturgesetze sind kovariant.

Postulat 1 Die Lichtgeschwindigkeit sei in allen Inertialsystemen gleich.

Postulat 2 Es gelte das Relativitätsprinzip.

Kausalitätsprinzip Ursache vor Wirkung.

Zusammenfassung

Teil 1. Die Spezielle Relativitätstheorie

Mathematisches Fundament

2. Die Lorentztransformation

Wechsel von Inertialsystemen
gefordert gemäß **Postulat 1 und 2.**

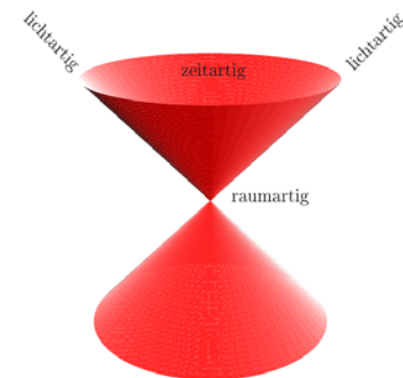
3. Der Minkowski-Raum

4D Raum-Zeit // c ist Grenzgeschwindigkeit

4. Tensoren im Minkowski-Raum*

Beschreibungswerkzeuge im 4D Raum

$$\eta_{cd}L^c{}_aL^d{}_b = \eta_{ab}$$



Modelle & Theorien

Korrektur der bisherigen/klassischen physikalischen Theorie zwingend notwendig

5. Konsequenzen der Lorentztransformation

6. Relativistische Mechanik

7. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

8. Relativistische Quantenmechanik*

4. Tensoren im Minkowski-Raum

4.1 Der Dualraum*

Definition („Linearform“).

Sei ein Vektor \mathbf{v} aus dem (z.B. reellen) Vektorraum V , so nennt man eine Zuordnung

$$\mathbf{v} \mapsto \varphi(\mathbf{v})$$

die der Bedingung $\varphi(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \alpha\varphi(\mathbf{v}_1) + \beta\varphi(\mathbf{v}_2)$,

genügt eine **Linearform**.

Satz über den Dualraum.

Definiert man für die j Addition und Multiplikation, so bildet die Menge aller Linearformen einen eigenen Vektorraum. Dieser Raum heißt **Dualraum**.

4. Tensoren im Minkowski-Raum

4.2 Vektorbasiswechsel & Transformation

Wir konstruieren einen 3D Raum mit einer Basis... ... und einer zweiten Basis

$$e^1 = (1, 0, 0)$$

$$e^2 = (0, 1, 0)$$

$$e^3 = (0, 1, 1)$$

$$e_1 = e^2 \times e^3 = (1, 0, 0)$$

$$e_2 = e^3 \times e^1 = (0, 1, -1)$$

$$e_3 = e^1 \times e^2 = (0, 0, 1)$$

und schreiben einen Vektor auf,

$$\mathbf{v} = v_1 e^1 + v_2 e^2 + v_3 e^3$$

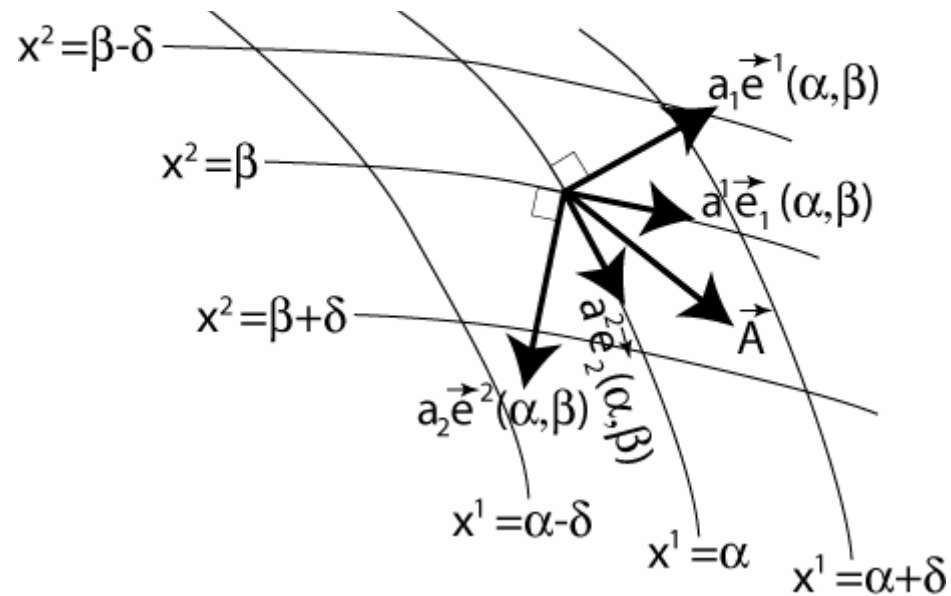
$$\mathbf{v} = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3$$

Gleichsetzen über \mathbf{v} erlaubt die Bestimmung der Komponenten.

4. Tensoren im Minkowski-Raum

4.2 Vektorbasiswechsel & Transformation

$$\mathbf{A} = a^i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}^i$$



4. Tensoren im Minkowski-Raum

4.2 Vektorbasiswechsel & Transformation

Wichtigster Punkt \longrightarrow **Fundamentaler Unterschied im Transformationsverhalten**

$$\mathbf{v} = v_i e^i$$

$$e^i = e^{j'} \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$$

kontravariant

$$\mathbf{v} = v_i e^i = v_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} e^{j'} = v_{j'} e^{j'}$$

Transformationen sind
einander entgegengerichtet.

$$v_{j'} = v_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \Leftrightarrow$$

$$v_i = v_{j'} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

kovariant

4. Tensoren im Minkowski-Raum

4.3 Transformationsverhalten

$$\mathbf{A} = a^i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}^i$$

Raum

kontravariant

$$a^i = a'^j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$$

$$\mathbf{e}^i = \mathbf{e}'^j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$$

Dualraum*

kovariant

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_j \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

$$a_i = a'_j \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

Jeder physikalische Vektor kann bezüglich dieser Basen entweder **kontravariant** oder **kovariant** dargestellt werden.

4. Tensoren im Minkowski-Raum

4.4 Definition des Begriffs Tensor

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum und V^* sein assoziierter Dualraum, so nennt man eine Multilinearform über

$$V_1 \times \dots \times V_p \times V_1^* \times \dots \times V_q^*$$

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \dots, \mathbf{v}_q' \mapsto T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \dots, \mathbf{v}_q')$$

einen *p-stufig kontravarianten* und *q-stufig kovarianter* **Tensor**.

Ein Tensor 0ter Stufe ist ein Skalar.

Ein Tensor 1ter Stufe ist ein Vektor.

Ein Tensor 2ter Stufe ist eine Matrix, und kann bereits gemischt-variant sein!

Ein 7stufig kontravarianter und 3stufig kovarianter Beispieltensor ist

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\eta\lambda}{}^{\mu\nu\varepsilon}_{\rho}$$

4. Tensoren im Minkowski-Raum

4.4 Definition des Begriffs Tensor

Seine Wirkung auf einen Vektor berechnet man gemäß **Summenkonvention**...

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{\eta\lambda}{}^{\mu\nu\varepsilon}{}_{\rho} V^{\lambda}$$

Man „**verjüngt**“ einen Tensor, indem man Indizes gleichsetzt...

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{\eta\lambda}{}^{\mu\nu\varepsilon}{}_{\rho} \delta^{\rho}{}_{\varepsilon} = T^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{\eta\lambda}{}^{\mu\nu\varepsilon}{}_{\varepsilon}$$

dadurch verliert er auch seine Stufe von n auf $n-2$...

$$M^{\alpha}{}_{\beta} \delta^{\alpha}{}_{\beta} = M^{\alpha}{}_{\alpha} = m$$

4. Tensoren im Minkowski-Raum

4.5 Minkowski-Tensoren

Einfacher Zusammenhang zwischen den verschiedenen Basissystemen für Tensoren im Minkowski-Raum:

$$x^\lambda = \eta^{\lambda\mu} x_\mu \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Das berühmte **Index-Shifting** ist die Hauptbeschäftigung der Relativistiker:

$$\eta^{\kappa\lambda} T^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{\eta\lambda}{}^{\mu\nu\varepsilon}{}_{\rho} = T^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{\eta}{}^{\kappa\mu\nu\varepsilon}{}_{\rho}$$

5. Konsequenzen der Lorentztransformation

5.1 Eigenzeit

Eine ruhende Uhr messe die Zeitspanne dt . Eine Uhr, die sich in einem mit der Geschwindigkeit v bewegenden IS befindet, mißt dann die Zeit $d\tau$.

$$d\tau = \gamma^{-1} dt = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} dt$$

$$\gamma \rightarrow 1 \quad \text{für } v \ll c$$

$$\gamma \rightarrow \infty \quad \text{für } v \rightarrow c$$

Die bewegte Uhr mißt für große v kleinere Zeiten dt . Sie geht also langsamer als die ruhende Uhr. Dieser Effekt heißt **Zeitdilatation** (lat. dilare *dehnen*).

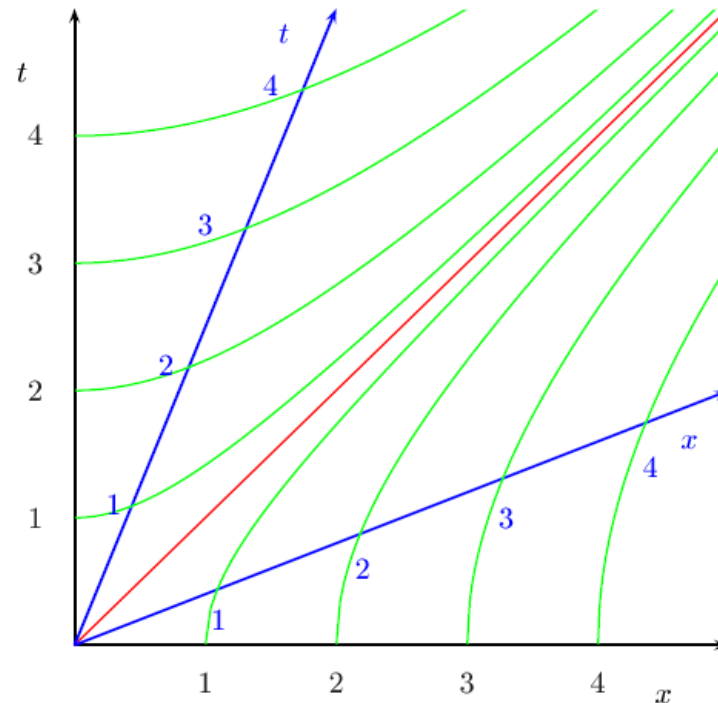
5. Konsequenzen der Lorentztransformation

5.2 Der Hyperboloid der Gleichzeitigkeiten

Eine direkte Folge des invarianten Wegelements

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 = ds^2$$

sind die hyperbolischen Linien der Gleichzeitigkeit, die eine Maßstabsübertragung ins bewegte IS darstellen.



Die Zeitdilatation ist hier ablesbar.

5. Konsequenzen der Lorentztransformation

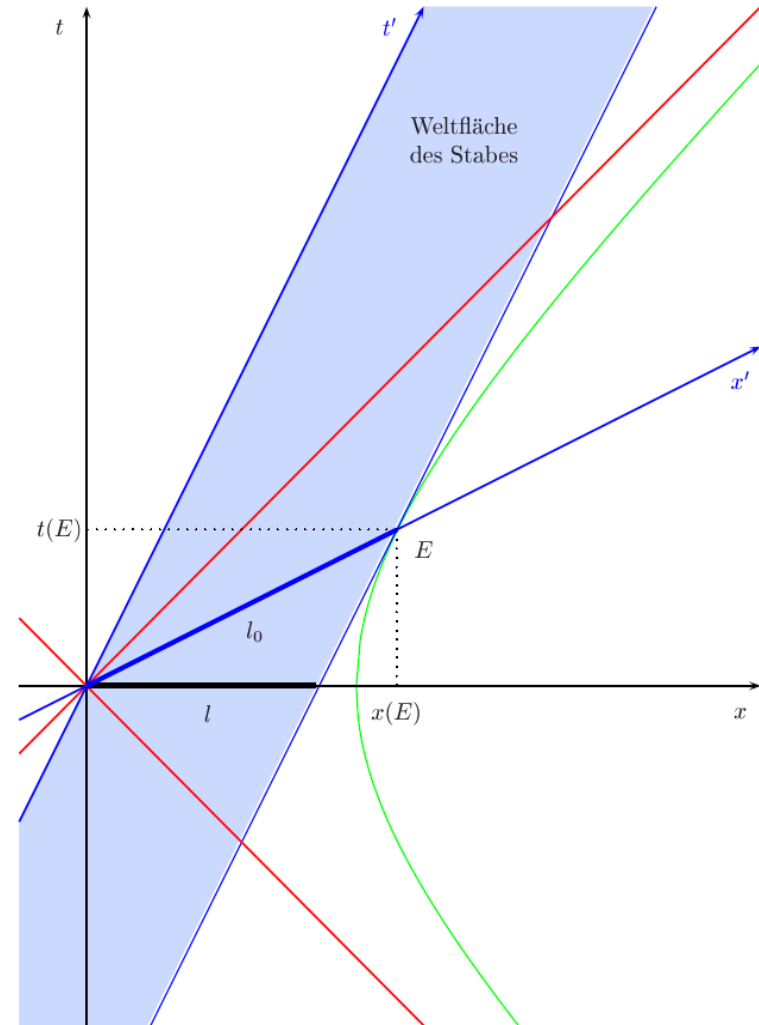
5.3 Längenkontraktion

Eine ruhender Stab habe die Länge l_0 .
 In einem mit v bewegten IS mißt man
 dann die Länge l gemäß der
 Lorentztransformation

$$l = \gamma^{-1} l_0$$

was bedeutet das ein bewegter
 Stab eine kleinere Länge besitzt.

Folgerichtig sind die Längen von
 Gegenständen in ihren
 jeweiligen Ruhssystemen
 maximal.



5. Konsequenzen der Lorentztransformation

5.1 Eigenzeit

Eine ruhende Uhr messe die Zeitspanne dt . Eine Uhr, die sich in einem mit der Geschwindigkeit v bewegenden IS befindet, mißt dann die Zeit $d\tau$.

$$d\tau = \gamma^{-1} dt = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} dt$$

$$\gamma \rightarrow 1 \quad \text{für } v \ll c$$

$$\gamma \rightarrow \infty \quad \text{für } v \rightarrow c$$

Die bewegte Uhr mißt für große v kleinere Zeiten $d\tau$. Sie geht also langsamer als die ruhende Uhr. Dieser Effekt heißt **Zeitdilatation** (lat. *dilare dehnen*).

5. Konsequenzen der Lorentztransformation

5.4 Zwillingsparadoxon

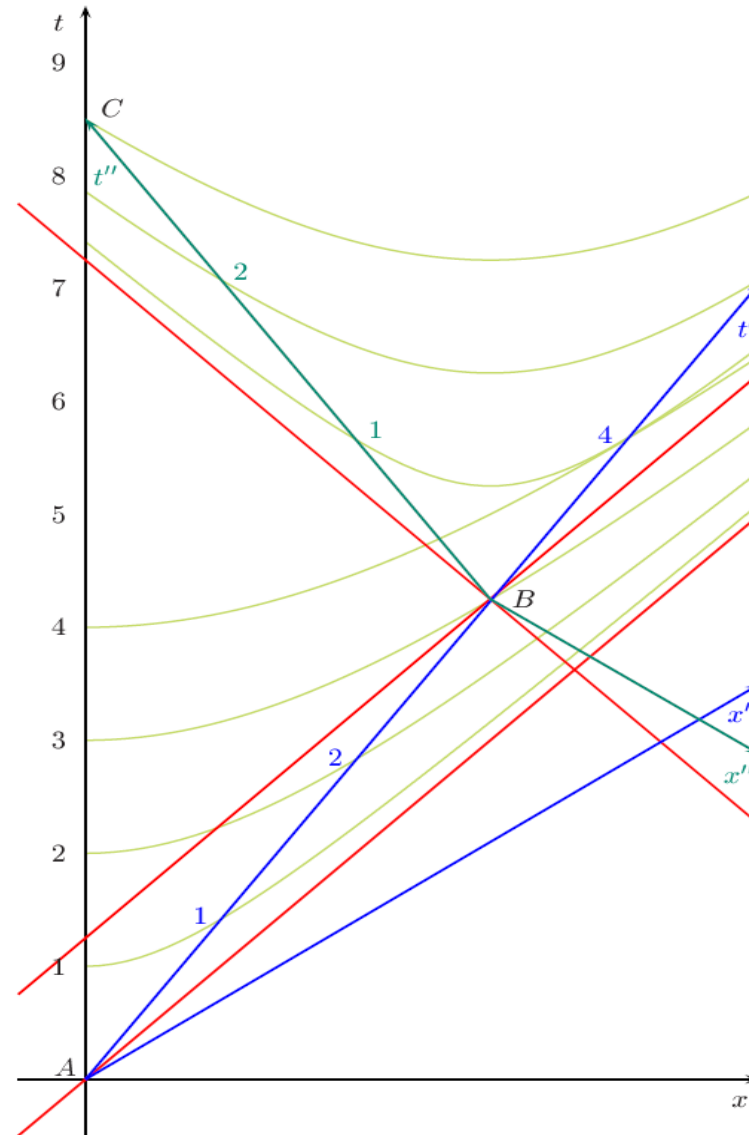
Zwilling 1 ruht.

Zwilling 2 startet bei **A** in ein bewegtes IS.

Er wechselt bei **B** in einer entgegengesetzt bewegtes IS und kehrt bei **C** wieder zurück.

Zwilling A ist nun jünger.

Aufhebung des Paradoxons: der Wechsel der IS passiert durch Beschleunigungen.



Zusammenfassung

Teil 1. Die Spezielle Relativitätstheorie

2. Die Lorentztransformation
3. Der Minkowski-Raum
4. Tensoren im Minkowski-Raum*

$$\eta_{cd} L^c_a L^d_b = \eta_{ab}$$

4D Raum!

Korrektur und Umschreibung der bisherigen physikalischen Theorie zwingend notwendig

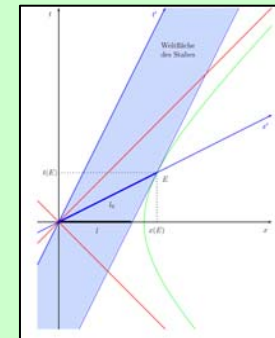
5. Konsequenzen der Lorentztransformation

- Zeitdilatation – bewegte Uhren gehen langsamer
- Längerkontraktion – bewegte Stäbe sind kürzer
- Zwillingsparadoxon – bewegte Zwillinge sind jünger

6. Relativistische Mechanik

7. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

8. Relativistische Quantenmechanik*



6. Relativistische Mechanik

6.1 Geschwindigkeit, Impuls und Energie

Wie hat eine Geschwindigkeit auszusehen, damit sie sinnvoll Lorentz-transformiert werden kann?

Zunächst noch einmal die „schnelle“ Herleitung der Zeitdilatation...

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2} = dt \sqrt{c^2 - \dot{x}^2}$$

$$s = \int_0^t ds = \int_0^t dt \sqrt{c^2 - \dot{x}^2}$$

$$\tau = \frac{s}{c} = \int_0^t d\tau$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}$$

6. Relativistische Mechanik

6.1 Geschwindigkeit, Impuls und Energie

Eine sinnvolle Parametrisierung mit der Eigenzeit τ ,

$$x = x(\tau), \quad t = t(\tau)$$

führt zur Definition der **4-Geschwindigkeit**,

$$u^\mu = \frac{dr^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \dot{\mathbf{r}}) \quad (6.1)$$

und damit auch zu einem **4-(Energie)-Impuls**,

$$p^\mu = m u^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = (\gamma m c, \gamma m \dot{\mathbf{r}}) \quad (6.2)$$

6. Relativistische Mechanik

6.1 Geschwindigkeit, Impuls und Energie

Die nullte Komponente dieses 4-Impulses entspricht der **Gesamtenergie**,

$$E = cp^0 = \gamma mc^2 \quad (6.3)$$

die sich im Falle $v=0$ auf die berühmte **Ruheenergie** reduziert,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}} \approx mc^2 \left[1 + \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2c^2} \right] = mc^2 + \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (6.4)$$

Im Rest der Störungsentwicklung ergibt sich (in 1.Ordnung!) die **kinetische Energie**.

Diese Entwicklung gehört zu den beliebtesten Prüfungsfragen im Diplom.

6. Relativistische Mechanik

6.2 Relativistische Kraftgleichung

Letztlich können wir so das **Newtonsche Kraftgesetz** neu formulieren,

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \longrightarrow K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (6.5)$$

$$(K^\mu) = \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}$$

Es existiert auch ein voller **Lagrangeformalismus** den wir gleich in der „neuen“ Elektrodynamik kurz vorstellen.

6. Relativistische Mechanik

6.3 Umschreibung der Mechanik

Was haben wir gerade gemacht ? ...

- 1) Die physikalischen Größen erhalten eine (neue) nullte Komponente.
- 2) Die nullte Komponente des Impulses entspricht nun einer Energie.
- 3) Aus dieser Energie lesen wir ab das es eine Ruheenergie gibt die äquivalent zur Masse des betrachteten Massepunktes ist.

... und warum war das überhaupt wichtig ?

Definition: Wir nennen ein Gesetz **lorentzkovariant**, wenn es bei Lorentztransformationen seine Gestalt beibehält. Tensorgleichungen sind immer kovariant weil Tensoren **Multilinearformen** sind.

Die (mechanische) Gesetze sind nun lorentzkovariant!

7. Relativistische F. der Elektrodynamik

7.1 Die Maxwell-Gleichungen

Die Elektrodynamik braucht nicht korrigiert zu werden, da sie bereits von vornherein relativistisch war. Sie muß aber noch **lorentzkovariant** geschrieben werden.

Ab jetzt und für (fast) immer: richtige theoretische Physik, $c=1$ und kompletter Übergang ins CGS ;-)

Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho && \text{Raumladungsdichte} \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{Keine magnetischen Monopole} \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \\
 \nabla \times \mathbf{B} &= 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} && \text{Verschiebungsstromdichte}
 \end{aligned}$$

Divergenzen=Ladungsquellen
 Rotationen=Feldquellen

Potentiale

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= -\partial_t\mathbf{A} - \nabla\phi \\
 \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

Skalares Potential
 Vektorpotential

Wellengleichungen

$$\begin{aligned}
 \square\mathbf{E} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\mathbf{E} = 0 \\
 \square\mathbf{B} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\mathbf{B} = 0
 \end{aligned}$$

D'Alembert Operator

7. Relativistische F. der Elektrodynamik

7.2 Der Feldtensor

Wir definieren den **Maxwellschen Feldtensor**,

$$F^{ab} := \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad F_{ab} := \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

und dieses Ding wurde wie folgt konstruiert,

$$\mathbf{E} \leftrightarrow E_{\hat{a}} = F_{0\hat{a}}$$

$$\mathbf{B} \leftrightarrow B_{\hat{a}} = -F_{\hat{b}\hat{c}} \text{ (zyklisch) oder } B_{\hat{a}} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}F_{\hat{b}\hat{c}}$$

und letztlich erzeugen wir einen **dualen Feldtensor**,

$${}^*F^{ab} := \frac{1}{2}\epsilon^{abcd}F_{cd}$$

7. Relativistische F. der Elektrodynamik

7.2 Der Feldtensor

Die Maxwell-Gleichungen nehmen dann eine neue Form an,

$$\partial_a F^{ab} = 4\pi j^b \quad \partial_a \overset{*}{F}{}^{ab} = 0 \quad (7.1)$$

und mit dem **4-Potential**

$$A = \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

schreibt man die Potentialgleichungen als

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a \quad (7.2)$$

7. Relativistische F. der Elektrodynamik

7.3 Das Wirkungsprinzip in der speziellen Relativität

Die Maxwell-Gleichungen lassen sich selbstverständlich auch aus einem **Wirkungsprinzip** Herleiten (dies wird in Elektrodynamik oft nicht erwähnt),

$$S = \int \mathcal{L} d^4x$$

Wobei die **4-Lagrangedichte** des Feldtensors zum Einsatz kommt,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} F_{ab} F^{ab}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \eta^{ac} \eta^{bd} (\partial_a A_b - \partial_b A_a) (\partial_c A_d - \partial_d A_c) + A_a j^a$$

und z.B. sogar **Materie** mit in die Felder mit eingekoppelt werden kann.

Exkurs: Relativistische Hydrodynamik

Hydrodynamische Gleichungen

Kontinuitätsgleichung//Liouville

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \text{grad} p = \mathbf{k}$$

relativistisch verallgemeinerte
Eulergleichung

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix}$$

$$\partial_b T^{ab} = 0$$

Energie-Impuls-
Tensor

Lorentzkovariant formuliert

7. Relativistische F. der Elektrodynamik

7.4 Der Energie-Impuls-Tensor

Mittlerweile bewähren sich Tensoren als nützliche Objekte. Ein weiterer unentbehrlicher Tensor ist der **Energie-Impuls-Tensor** (je nach Problem unterschiedlich),

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(\eta^{cd} F_{ac} F_{db} + \frac{1}{4} \eta_{ab} F_{cd} F^{cd} \right) \quad (7.4)$$

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad \text{Energiedichte}$$

$$T^{\hat{a}0} = -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_a \quad \text{Poynting-Vektor}$$

$$\text{Maxwellscher Spannungstensor} \quad T^{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{4\pi} \left(-E_{\hat{a}} E_{\hat{b}} - B_{\hat{a}} B_{\hat{b}} + \frac{1}{2} \delta_{\hat{a}\hat{b}} (\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2) \right)$$

7. Relativistische F. der Elektrodynamik

7.4 Der Energie-Impuls-Tensor

Wie beweist man, dass diese Terme stimmen?

Man rechnet sie komponentenweise nach! Dies würde unseren Rahmen Sprengen, steht aber detailliert im Skript.

$$\begin{aligned}
 T^{00} &= \frac{1}{4\pi} \left(F^0{}_c F^{c0} + \frac{1}{4} F_{cd} F^{cd} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{c=1}^3 F_{c0} F_{c0} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \right) \\
 &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \\
 T_{\hat{a}0} &= \frac{1}{4\pi} \left(\eta^{cd} F_{\hat{a}c} F_{d0} + 0 \right) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{c=1}^3 F_{\hat{a}c} F_{c0} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{c,d=1}^3 \epsilon_{\hat{a}cd} B_d F_{c0} \\
 &= -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_a \\
 T^{\hat{a}\hat{b}} &= \frac{1}{4\pi} \left(\eta^{cd} F_{\hat{a}c} F_{\hat{d}b} + \frac{1}{4} \eta_{\hat{a}\hat{b}} F_{cd} F^{cd} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\eta^{cd} F_{\hat{a}c} F_{\hat{d}b} + \frac{1}{2} \eta_{\hat{a}\hat{b}} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(-F_{0\hat{a}} F_{0\hat{b}} - \sum_{c=1}^3 F_{\hat{a}c} F_{c\hat{b}} - \frac{1}{2} \delta_{\hat{a}\hat{b}} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(-E_{\hat{a}} E_{\hat{b}} - \sum_{c,d,e=1}^3 \epsilon_{\hat{a}cd} B_d \epsilon_{c\hat{b}e} B_e - \frac{1}{2} \delta_{\hat{a}\hat{b}} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(-E_{\hat{a}} E_{\hat{b}} + \sum_{d,e=1}^3 (\delta_{\hat{a}\hat{b}} \delta_{de} - \delta_{\hat{a}e} \delta_{\hat{b}d}) B_d B_e - \frac{1}{2} \delta_{\hat{a}\hat{b}} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(-E_{\hat{a}} E_{\hat{b}} + \delta_{\hat{a}\hat{b}} \mathbf{B}^2 - B_{\hat{a}} B_{\hat{b}} - \frac{1}{2} \delta_{\hat{a}\hat{b}} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(-E_{\hat{a}} E_{\hat{b}} - B_{\hat{a}} B_{\hat{b}} + \frac{1}{2} \delta_{\hat{a}\hat{b}} (\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2) \right).
 \end{aligned}$$

Weg zur Feldtheorie

- Es ist möglich physikalische Gesetze mit Tensoren, also kovariant zu schreiben
- Die Lorentzinvarianz garantiert automatisch das nun die SRT streng gilt.
- Alle Gesetze werden prinzipiell einfacher.

