

Lasertheorie^{v2.3}



Marcus Neuer, marcus@mndevelopments.de
www.mndevelopments.de

§1 Einführung

1.0. Zu diesem Script

Dieses Script wurde als Mitschrift der Vorlesung "Laserphysik" von Prof. PhD. Schiller erstellt, dann aber ständig erweitert. In der nun vorliegenden Version 2.3 liegt der Schwerpunkt immer noch auf der Lasertheorie. Wem die Ratengleichungen bereits geläufig sind, oder wer sich nicht für die theoretischen Details interessiert, der möge §2-§4 überspringen. Dagegen spiegeln §5 und §6 die obligatorischen Themen der Laserphysik wieder. §7 und §8 sollen spektrale Eigenschaften erklären, und §9 hat die Pulserzeugung zum Inhalt.

Neben den Überschriften finden sich meist Angaben, von welchen Büchern, bzw. (düsseldorfer) Professoren die jeweiligen Themen am besten erklärt wurden.

1.1. Laserprinzip

1.1.1. Einfache Beschreibung von Baugruppen und Funktion

Ein Laser ist eine Lichtquelle, die kohärentes und zuweilen monochromatisches Licht emittiert. Er besteht aus einem *optischen Resonator*, einer sogenannten *Pumpe* und dem *aktiven Medium*. Die Pumpe regt dabei im aktiven Medium Teilchen in höhere Zustände an, welche über spontane Abregung oder stimulierte Emission wieder in ein niedrigeres Niveau gelangen, dabei werden Photonen abgegeben. Die stimulierte Emission funktioniert nur dann, wenn ein Strahlungsfeld das Teilchen zu der Abgabe eines Photons "zwingt".

Ein spontan abgegebenes Lichtquant, was zufällig in die richtige Richtung emittiert wurde initiiert dann das Anschwingen einer Feldmode im Resonator, die durch die stimulierte Emission im aktiven Medium weiter verstärkt wird. Feldmoden sind stabile "Schwingungszustände" eines Strahlungsfeldes, vergleichbar zu den stehenden Schallwellen in Orgelpfeifen. Die Verstärkung kommt nur dann zustand wenn mehr Teilchen im angeregten Zustand zu finden sind. Ansonsten würde es lediglich zu einer Absorption kommen. Durch eine teiltransmittiven Spiegel wird schließlich das Licht ausgestrahlt.

1.1.2. Das Zwei-Niveau-System

Da sowohl Absorption als auch Verstärkung auf atomaren Prozessen beruhen, ist es sinnvoll diese Zusammenhänge innerhalb eines 2 Niveaus-Systems zu betrachten.

Seien N_2 und N_1 die Teilchenzahlen im Niveau 1 und 2. Ferner sei $E_2 > E_1$; Für die Resonanzfrequenz dieses Systems gilt,

$$h\nu_{12} = E_2 - E_1.$$

Befindet sich ein Teilchen im Zustand 2, so kann es spontan ein Photon der Frequenz ν_{12} emittieren. Alternativ kann es durch das Strahlungsfeld dazu gezwungen werden, ein Photon abzugeben.

Teilchen im Zustand 1 können einfallende Strahlung nur absorbieren.

Wie bereits oben beschrieben, ist es für einen Laser notwendig, möglichst viele Teilchen in den oberen Zustand zu bringen, damit eine Verstärkung des Strahlungsfeldes zustande kommt. Dies nennt man Inversion.

1.1.3. Die Ratengleichungen

Durch die Ratengleichungen, die Bewegungsgleichungen der Besetzungsniveaus darstellen, kann die Dynamik der einzelnen Niveaus erfaßt werden,

$$d_t N_1 = A_{21} N_2 + u(\nu) (B_{21} N_2 - B_{12} N_1), \quad (1)$$

$$d_t N_2 = -A_{21} N_2 + u(\nu) (-B_{21} N_2 + B_{12} N_1). \quad (2)$$

Die Faktoren A,B heißen Einstein-Koeffizienten; A ist die Wahrscheinlichkeit, bzw. die Rate für die spontane Emission; $B^*u(\nu)$ ist die entsprechende Rate für stimulierte Prozesse, sie ist für Emission und Absorption gleich, dennoch kann man die Emission größer werden lassen, Um nun den Effekt der stimulierten Emission zu erhöhen,

$$(\partial_t N_2)_{\text{Stimulierte Emission}} = - B_{21} N_2 u(\nu), \quad (3)$$

muß dafür gesorgt werden, daß mehr Elektronen im oberen Niveau sind. Die Erzeugung einer solchen Besetzungsinversion wird Pumpen genannt, wobei die Prozesse die eine solche Anhebung bewirken, unterschiedlich sein können. Wie man an (3) sehen kann muß ebenfalls die Strahlungsdichte $u(\nu)$ groß sein.

Dies soll zunächst einen Einblick geben, wie man Raten formuliert. Explizite Darstellungen werden in den nachfolgenden Kapiteln gegeben.

1.2. Maxwell Gleichungen

Licht wird durch einen Satz von relativistischen Differentialgleichungen erfaßt, den sogenannten Maxwell Gleichungen,

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

Neben den Hauptgleichungen lassen sich Potentiale \mathbf{A} und φ definieren, sodaß die Felder mit

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (8)$$

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \varphi, \quad (9)$$

aus diesen generiert werden können.

Setzt man die Coulomb-Eichung voraus, $\nabla \mathbf{A} = 0$, so führen die Maxwell Gleichungen, durch (7) und (8) auf die Poisson-Gleichung,

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (10)$$

1.3. Quantisierungsidee

Kommt man in den mikroskopischen Bereich, so können \mathbf{E} und \mathbf{B} Felder nicht mehr klassisch beschrieben werden. Man muß nun Operatoren finden, deren Erwartungswerte,

$$E_0 = \langle \psi_0 | \mathbf{E} | \psi_0 \rangle$$

die gemessenen Werte korrekt wiedergeben. Ferner unterliegen sie einer Abweichung,

$$\sigma^2 = \langle \psi_0 | (\mathbf{E} - E_0)^2 | \psi_0 \rangle,$$

hervorgerufen durch eine Heisenberg-Unschärfe in den Komponenten der \mathbf{E} und \mathbf{B} Feldoperatoren.

Sinn der Sache:

Warum wird überhaupt eine Quantisierung eingeführt ?

Spontane Emission von Atomen und Molekülen kann nur so beschrieben werden, das Verhalten des Feldes ist quantal, wenn nur wenig Photonen vorhanden sind.

1.4. Identifikation als harmonischer Oszillator

Liegt ein abgeschlossenes Raumgebiet mit Randbedingungen vor, so fordern die Maxwellgleichungen mehrere Moden, d.h. Schwingungszustände. Gemeint ist hierbei, das es zu der Wellengleichung für das E-Feld,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} = 0, \quad (11)$$

einfach mehrere Lösungsfunktionen gibt. Jeder dieser Moden wird ein quantenmechanischer Oszillator zugeordnet, wobei das Zeitverhalten der Amplitude quantisiert wird. Eine Lösung wäre z.B.

$$E(t) = X \cos(\omega_n t) + Y \sin(\omega_n t), \quad (12)$$

wobei die ω_n genau die Winkelfrequenzen sind, die durch die Randbedingungen zur Lösung von (8) führen. Die Amplituden (Wahrscheinlichkeiten), X, Y , sind die quantisierten Größen. Sie werden mit Ort und Impuls des herkömmlichen harmonischen Oszillators identifiziert. D.h. es gilt eine Kommutatorrelation der Form:

$$[p, q] = -i\hbar \quad \longleftrightarrow \quad [X, Y] = -i\hbar. \quad (13)$$

Dies bedeutet X und Y sind kanonisch konjugiert, und nach Heisenberg besteht zwischen einem Operatorpaar was (10) erfüllt eine Unschärfe,

$$\Delta X \Delta Y \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (14)$$

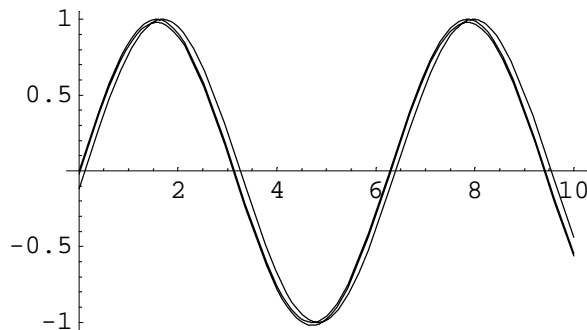


Abb. 1.1 Unschärfe in E-Feld-Amplituden

Figur 1 zeigt die Unschärfe im Feld. Quantenmechanisch rechnen lassen sich die Unschärfen angeben zu,

$$\Delta Y = [\langle \psi | (Y - Y_0)^2 | \psi \rangle]^{1/2}. \quad (15)$$

Man erhält folglich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, den Wert X zu messen,

Plot[Exp[-x²], {x, -2, 2}, AxesLabel → {"X", "P(X)"}]

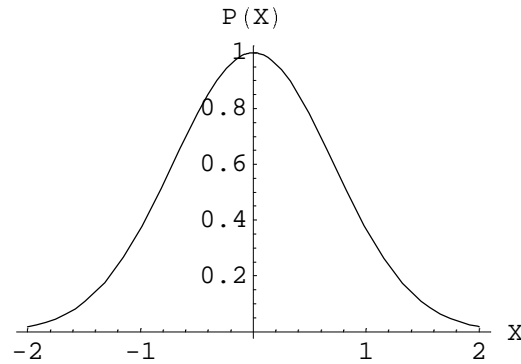


Abb.1.2. Verteilung der möglichen E-Feldamplituden

D.h. während klassisch das **E**-Feld Null sein kann, liegt wegen der Unschärfe quantenmechanisch stets ein Rauschen vor.

$$\langle E \rangle = 0 \text{ aber } \langle E^2 \rangle \neq 0 \quad (16)$$

Betrachtet man ein solches E-Feld im Phasenraum, so erhält man ein Wahrscheinlichkeit P auf der z-Achse

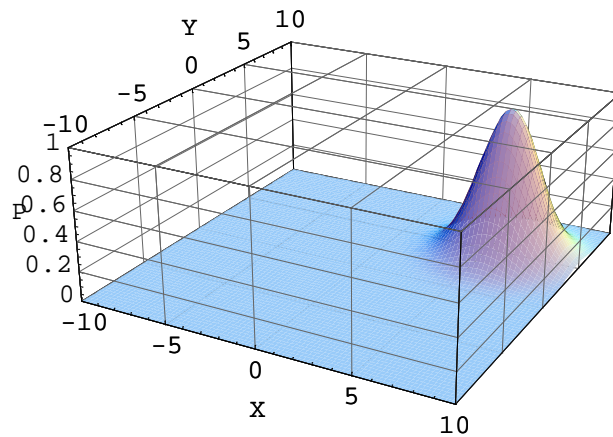


Abb.1.3. Phasenraumdarstellung, eig. rotierendes Gaußpaket

1.5. Schrödinger Gleichung

Da der Laser auf interatomaren Übergängen beruht, muß einer vollständigen Betrachtung die Quantenmechanik zugrunde gelegt werden.

Allgemein gehorchen Wellenfunktion in ihrer Zeitentwicklung einer Differentialgleichung der Schrödinger Form,

$$\psi_t - \psi_x - c = 0, \quad (17)$$

daher wird in der Quantenmechanik die Schrödinger Gl. wie folgt postuliert:

$$i\hbar \partial_t |\psi\rangle = \left\{ \frac{p^2}{2m} + V \right\} |\psi\rangle, \quad (18)$$
$$i\hbar \partial_t |\psi\rangle = H_0 |\psi\rangle.$$

Wobei der Hamilton-Operator H_0 (Hamiltonian) wie folgt aussieht:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V. \quad (19)$$

Dieser Hamiltonian gilt für "freie" Elektronen. Er enthält jedoch noch keinerlei Terme, die die Felder charakterisieren.

§2 Quantisierung des Strahlungsfeldes

Wie in §1 beschrieben, stellen die Ratengleichungen die zentralen Bewegungsgleichungen eines Lasersystems dar. Raten sind nichts anderes als reziproke Lebensdauern von quantenmechanischen Zustände. Es muß daher eine, wie in 1.3 vorgeschlagene Quantisierung der Felder durchgeführt werden, um den Hamiltonian in der Schrödingergleichung geeignet zu modifizieren.

2.1. Bewegungsgleichung der Potentiale [S1][4]

Ausgehend von den Maxwell Gleichungen in §1, leiten wir nun eine Beschreibung des Vektorpotentialoperators \mathbf{A} her. Startpunkt bildet (4),

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

einsetzen von (5) und (6) liefert dann,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \frac{1}{c^2} \partial_t (-\partial_t \mathbf{A} - \nabla \varphi) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j} \\ -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \mathbf{A}) &= -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \varphi + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j} \\ \left[\frac{1}{c^2} \partial_t - \nabla^2 \right] \mathbf{A} &= \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \varphi - \nabla(\nabla \mathbf{A}). \end{aligned} \quad (20)$$

Freiheit der Eichtransformation läßt es zu, \mathbf{A} und φ so zu wählen, das gilt:

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon_0 \quad (21)$$

$$\square \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2} \quad (22)$$

Gleichung (22) bildet Ausgangspunkt für die nächsten Betrachtungen.

2.2. Bewegungsgleichungen im Reziproken Raum [S1][4]

Durch Fouriertransformation ist ein Wechsel in den reziproken Raum möglich. Grund ist, das partielle Differentialgleichungen wie (22) dort zu gewöhnlichen Dgl's in der Zeit werden.

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 r \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (23)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k \mathbf{A}(\mathbf{k}, t) e^{+i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (24)$$

Betrachte folgende Transformation von (22):

$$\left[\frac{1}{c^2} \partial_t - \nabla^2 \right] \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k \mathbf{A}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right\} = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0 c^2}$$

$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ transformiert sich mittels Analogie zu (23) ebenfalls in den \mathbf{k} -Raum,

$$\left[\frac{1}{c^2} \partial_t - \nabla^2 \right] \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k \mathbf{A}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right\} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k \mathbf{j}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right\},$$

hierbei ergibt der Operator ∇^2 ein $+k^2$ beim Ableiten, weil nur die Exponentialfunktion eine Ortsabhängigkeit aufweist, schließlich erhält man,

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{k}, t)}{\varepsilon_0 c^2}. \quad (25)$$

Die Differentialgleichung hat hier ihre Ortsabhängigkeit verloren! Gleichung (25) entspricht der Bewegungsgleichung eines erzwungenen Oszillators, wobei der Term $\frac{\mathbf{j}(\mathbf{k}, t)}{\varepsilon_0 c^2}$ die auf den Oszillator wirkende Kraft beschreibt.

2.3. Quantisierung [S1][4]

Eigentliches Ziel ist die Quantisierung von \mathbf{A} , und damit indirekt auch die von \mathbf{E} . Durch den Ausflug in den reziproken Raum wurde ersichtlich, daß sich \mathbf{A} auch wie folgt darstellen läßt (erweiterte Fourierdarstellung, unsymmetrisch):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int d^3 k A_w \alpha(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (26)$$

Und der Vektor α läßt sich weiterhin darstellen als Linearkombination aus den Polarisationsvektoren $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}'$, die beide senkrecht auf \mathbf{k} stehen.

$$\alpha(\mathbf{k}, t) = \sum_{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'} \boldsymbol{\varepsilon} \alpha_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{k}, t). \quad (27)$$

Durch diesen Schritt wurde die vektorielle Beschreibung in die ε verlegt. Liegt ein freies elm-Feld vor, so lässt sich auch noch die Zeitabhängigkeit separieren,

$$\alpha_\varepsilon(\mathbf{k}, t) = \alpha_\varepsilon(\mathbf{k}) e^{-i\omega t}, \quad (28)$$

$$\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\varepsilon, \varepsilon'} \varepsilon \alpha_\varepsilon(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (29)$$

Mit (25) folgt dann,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int d^3k A_w \sum_{\varepsilon, \varepsilon'} \varepsilon \alpha_\varepsilon(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (30)$$

zusätzlich gilt bei Fouriertransformation, folgende Summentransformation:

$$\int d^3k \sum_{\varepsilon, \varepsilon'} f(\mathbf{k}, \varepsilon) \leftrightarrow \sum_i \left(\frac{2\pi}{L} \right) f(\mathbf{k}_i, \varepsilon_i). \quad (31)$$

Mit dieser Hilfe lässt sich schließlich (30) schreiben als,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_i A_i \{ \alpha_i \varepsilon_i e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \alpha_i^* \varepsilon_i e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \} \quad (32)$$

Da beim transversalen Vektorpotential $\mathbf{E}_\perp = -\partial_t \mathbf{A}_\perp$ gilt, lässt sich unter Benutzung von (29) zur Berechnung der Zeitableitung der Ausdruck für \mathbf{E} herleiten:

$$\mathbf{E} = i \sum_i E_i \{ \alpha_i \varepsilon_i e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \alpha_i^* \varepsilon_i e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \} \quad (33)$$

Mit den Normierungskoeffizienten,

$$A_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_i L^3}}, \quad E_i = \sqrt{\frac{\hbar \omega_i}{2\varepsilon_0 L_i}}.$$

Die entgeltige Quantisierung geschieht durch den Übergang zu den Leiteroperatoren,

$$\alpha_i \rightarrow a_i ; \quad \alpha_i^* \rightarrow a_i^\dagger. \quad (34)$$

Anschaulich gesehen können diese Operatoren Photonen in der iten Moden erzeugen oder vernichten. Der \mathbf{E} -Feld Operator ergibt sich also zu,

$$\mathcal{E} = \sum_i \mathcal{E}_i (a_i - a_i^\dagger). \quad (35)$$

Da unser Ausgangspunkt der harmonische Oszillator war, lässt sich damit die Energie, bzw. H , der Feldmoden angeben:

$$H_{\text{Feld}} = \sum_i \hbar\omega \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) \quad (36)$$

Sinn der Sache:

Packt man die Operatoren mit in die Schrödinger Gleichung hat man eine komplette, quantale Beschreibung des Systems.

2.4. Hamiltonian [S1][4]

Der Hamiltonian für unser Problem setzt sich demnach aus 3 Teilen zusammen, dem Atomhamiltonian, dem Feldoperator, und einem Operator, der die Wechselwirkung erfasst.

$$H = H_0 + H_{\text{Feld}} + H_{\text{WW}}. \quad (37)$$

Heuristisch liegt es nahe die Form von H_{ww} bereits als,

$$H_{\text{ww}} = -\hat{d} \hat{\mathcal{E}} \quad ; \quad \hat{d} = q \langle \psi | \hat{r} | \psi \rangle, \quad (38)$$

anzunehmen. Korrekt ist allerdings die Herleitung aus dem bekannten elm-Feld-Hamiltonian aus der Quantenmechanik.

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V + \sum_i \hbar\omega \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) - \frac{q}{m} \mathbf{p} \mathbf{A} + \frac{q^2}{2m} \mathbf{A}^2. \quad (39)$$

Dies ist zentrales Resultat der Quantisierung des Strahlungsfeldes. Dieser Hamiltonian wird nun der folgenden Argumentation zu Grunde gelegt.

2.5. Wirkung der Erzeuger und Vernichter; Schreibkonventionen [S2]

Die Erzeuger und Vernichter wirken nur innerhalb der Mode wo sie definiert sind, also in der iten. Das Feld bildet also einen Hilbertraum, der neben dem atomaren Hilbertraum existiert. Man kann nun in die Klammer die Anzahl der Photonen, oder die Welle speziell, d.h. mit $k_j \varepsilon$ zu kennzeichnen.

Sei $\{|n\rangle\}$ eine Basis für eine Mode so kann man einen Zustand kennzeichnen durch

$$\begin{aligned} |a, \{n_i\}\rangle &= |a\rangle | \{n_i\} \rangle \\ | \{n_i\} \rangle &= | n_1 n_2 n_3 \dots \rangle = | n_1 \rangle | n_2 \rangle | n_3 \rangle \dots \\ \rightarrow | \psi \rangle &= \sum_a \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots c_{a,n_1,n_2,\dots} | a \{n_i\} \rangle . \end{aligned} \quad (40)$$

Die jeweiligen Hamiltonoperatoren (Feld, Atom u. WW) wirken natürlich nur in ihrem jeweiligen Hilbertraum. Für das Atom sind die herkömmlichen Eigenwerte zu erwarten, $H_{\text{Atom}} |\psi_0\rangle = E_0 |\psi_0\rangle$, wobei die Erzeuger und Vernichter wie folgt arbeiten:

$$\begin{aligned} a_2 |n_1 n_2 n_3 \dots\rangle &= \sqrt{n_2} |n_1 (n_2 - 1) n_3 \dots\rangle \\ a_2^+ |n_1 n_2 n_3 \dots\rangle &= \sqrt{n_2 + 1} |n_1 (n_2 + 1) n_3 \dots\rangle \\ a_i |0\rangle &= 0 \quad a_i^+ |0\rangle = |0 \dots 0 1 0 \dots 0\rangle \end{aligned} \quad (41)$$

Der a_i^+ erzeugt in der i ten Mode ein Photon. Alternativ kann man auch schreiben,

$$a_i^+ |0\rangle = |k_i \varepsilon\rangle. \quad (42)$$

Lediglich andere Art den Vektor anzugeben.

§3 Spontane Emission

3.1. Fermi's Goldene Regel [8][7][S1][4]

Der Hamiltonian (39) enthält bereits zuviel Informationen, daher werden als nächstes die quadratischen Terme (A^2) vernachlässigt. Bereits weggelassen wurden sämtliche Spineinflüsse und Rückstoßeffekte.

Nehmen wir an, ein angeregtes Atom oder Molekül gibt ein Photon ab, mit der Energie $E = c\hbar k = h\nu = E_b - E_a$. Die Gesamtstrahlung ist richtungsunabhängig, d.h. isotrop.

Ziel ist die Berechnung einer Lebensdauer, bzw. der Übergangsrate zwischen den Niveaus. Basis bildet Fermi's Goldene Regel, die aus den Wechselwirkungsmatrixelementen eine Rate angibt,

$$\Gamma_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | H_{ww} | i \rangle \right|^2 \rho(E = E_f - E_i). \quad (43)$$

Nach der Notationsregeln gilt für $V_{if} = \langle \text{final} | H_{ww} | \text{initial} \rangle$, somit in unserem Fall, Atom im angeregten Zustand $|b\rangle$ als initial, und kein Photon im System, $|0\rangle$ geht über in den Finalstate $|a\rangle$ mit einem Photon in der Mode j , $\langle \mathbf{k}_j \varepsilon_j |$:

$$V_{if} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{k}_j \varepsilon_j | H_{ww} | \mathbf{b}, 0 \rangle. \quad (44)$$

Die Vernichter und Erzeuger funktionieren dann so wie in 2.5. beschrieben. Somit kann man schließlich eine Gesamtübergangsrate berechnen:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{\substack{\text{über alle} \\ \text{Polarisationen für } j}} \Gamma_{if} \\ \rightarrow \Gamma &= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{q}{m} \right) \sum A_j^2 \cdot \left| \langle \mathbf{a} | \langle \mathbf{k}_j \varepsilon_j | \{ a_j \varepsilon_j + a_j^+ \varepsilon_j \} | 0 \rangle | \mathbf{b} \rangle \right|^2 \cdot \rho \\ &\Leftrightarrow \Gamma = \\ &\frac{2\pi q^2}{\hbar m^2} \sum A_j^2 \left| \langle \mathbf{a} | \mathbf{p} \varepsilon_j | \mathbf{b} \rangle [\langle \mathbf{k}_j \varepsilon_j | a_j | 0 \rangle + \langle \mathbf{k}_j \varepsilon_j | a_j^+ | 0 \rangle] \right|^2 \rho \end{aligned}$$

offensichtlich gilt nach 2.5. für die Matrixelemente:

$$\langle \mathbf{k}_j \varepsilon_j | a_j | 0 \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{k}_j \varepsilon_j | a_j^+ | 0 \rangle = \langle \mathbf{k}_j \varepsilon_j | \mathbf{k}_j \varepsilon_j \rangle = 1$$

Nach einer Übungsaufgabe in QM1 gilt $[\mathbf{r}, H] = \frac{i\hbar}{m} \mathbf{p}$, damit läßt sich vorderes Matrixelement auch schreiben a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} | \mathbf{p} | \mathbf{b} \rangle &= \frac{m}{i\hbar} \langle \mathbf{a} | [\mathbf{r}, H] | \mathbf{b} \rangle \\ &= \frac{m}{i\hbar} [\langle \mathbf{a} | \mathbf{r} H | \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a} | H \mathbf{r} | \mathbf{b} \rangle] \\ &= \frac{m}{i\hbar} (E_b - E_a) \langle \mathbf{a} | \mathbf{r} | \mathbf{b} \rangle \\ &= -i m \omega_j \langle \mathbf{a} | \mathbf{r} | \mathbf{b} \rangle \end{aligned} \quad (45)$$

Multipliziert man das q wieder ein, kürzt m heraus, so ergibt sich:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{q}{m} \right)^2 \sum_j (A_j \omega_j)^2 \left| \langle \mathbf{a} | q \hat{\mathbf{r}} | \mathbf{b} \rangle \right|^2 \rho \quad (46)$$

Was nun noch fehlt ist ρ .

3.2. Zustandsdichte [S1]

Analog zur Herleitung von Plancks Gesetz, kann man die Anzahl der Moden abschätzen. Betrachtet man einen Quader der Kantenlänge L, so kann man sich fragen, welche Moden dort schwingen dürfen. Betrachtet man weiter sinusförmige Schwingungen, (z.b. in y, muß natürlich für alle Richtungen gelten !)

$$E_y \sim \sin(k_y y)$$

Nun können die elektrodynamischen Randbedingungen eingefordert werden, da am Rand $E_y(0) = 0$ und $E_y(L)=0$ sein muß. Im Sinus ist das äquivalent zu

$$k_y L = N_y \pi$$

$$N_y = 0, 1, 2, \dots$$

Mit $k = \frac{\omega}{c}$ gilt schließlich für die Modenstückzahl :

$$N_{x,y,z} = \frac{L \omega_{\max}}{c\pi} \quad (47)$$

D.h. die Gesamtzahl der Moden (x,y,z) ist durch das Volumen der Achtelkugel mit Radius N gegeben:

$$\text{Anzahl: } \mathcal{N} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{L \omega_{\max}}{c\pi} \right)^3 \quad (48)$$

$$\frac{d\mathcal{N}}{d\omega} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{L}{c\pi} \right)^3 \omega^2 \equiv \bar{\rho} = \frac{V}{2\pi^2 c^3} \omega^2$$

Somit haben wir die Anzahldichte für eine Polarisationsrichtung, für isotrope Abstrahlung gilt dann nach Demtröder,

$$\rho(\omega) = \frac{\bar{p}}{4\pi \cdot \text{Steradian}} = \frac{V}{(2\pi c)^3} \omega^2$$

$$\rho(E) = \rho(\omega) \frac{d\omega}{dE} = \frac{V}{(2\pi \hbar c)^3} E^2 \quad (49)$$

Eine andere nützliche Frage wäre, wie man mit dieser Betrachtung auch auf den Planckschen Vorfaktor kommt. Dazu setzt man in (48) $\omega = 2\pi\nu$ ein, und differenziert nach ν ,

$$N = \frac{\pi}{6} \left(\frac{2L\nu}{c} \right)^3$$

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2L}{c} \right)^3 \nu^2$$

$$M(\nu) = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} \quad (50)$$

(* Berücksichtigt man jetzt noch, daß zwei Polarisierungen möglich sind, teilt durchs Volumen, so erhält man mit $2M(\nu)$ den Planck'schen Vorfaktor *)

3.3. Herleitung einer Formel für die Spontane Emission [S1] [4]

Das Matrixelement aus (46) muß nun noch vereinfacht werden,

$$| \langle \mathbf{a} | \mathbf{q} \mathbf{r} | \mathbf{b} \rangle \cdot \varepsilon_j |^2 = d^2 | \varepsilon_j \mathbf{e}_z |^2$$

Mit einer Umformung (*Cohen-Tannoudji: Atom Photon Interactions*) kann gezeigt werden, daß gilt:

$$\sum_{\varepsilon \perp \mathbf{k}} | \mathbf{X} \cdot \varepsilon |^2 = | \mathbf{X} |^2 - \frac{(\mathbf{kX})(\mathbf{kX}^*)}{k^2}$$

In unserem Fall ist $\mathbf{X} = e_z$, und $\mathbf{kX} = \mathbf{k}e_z = k e_z \cos\theta$, und damit gilt

$$\sum_{\varepsilon \perp \mathbf{k}} | \mathbf{X} \cdot \varepsilon |^2 = | \mathbf{X} |^2 - \frac{(\mathbf{kX})(\mathbf{kX}^*)}{k^2} = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta \quad (51)$$

Um nun der totalen Übergangsrate zu berechnen muß noch über den Raumwinkel integriert werden, dabei nutzt man das Integral

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) \sin\theta d\theta = \frac{4}{3}$$

$$\Gamma = \int \Gamma d\Omega = \int \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 L^3} d^2 \frac{L^3}{(2\pi\hbar c)^3} E^2 \sin^2 \theta d\Omega$$

$$= \frac{\pi\hbar^3 \omega^3}{\varepsilon_0 \hbar (2\pi\hbar c)^3} 2\pi \frac{4}{3}$$

Als Endergebnis erhalten wir die Formel für die Übergangsrate für die spontane Emission, den Einsteinschen A-Koeffizienten,

$$\Gamma = \frac{1}{3\pi} \frac{1}{\varepsilon_0 \hbar c^3} \omega^3 d^2 \equiv A. \quad (52)$$

Diese Übergangsrate das Resultat der quantenmechanischen Herleitung, und wird in den nächsten Betrachtungen vorausgesetzt.

$d = \langle a | q | b \rangle$ ist das Dipolmatrixelement.

3.4. Zusammenfassung

- (1) Zunächst wurde der Wechselwirkungshamiltonian in Fermi's Goldene Regel eingesetzt.
- (2) Die fehlende Energiedichte wurde mit Hilfe von Planckschen Überlegungen zur Modenanzahl berechnet, das Matrixelement mittels Rechenricks umgeformt.
- (3) Im Ergebnis fällt auf, das die Übergangsrate *kubisch* von ω und *quadratisch* vom Dipolmatrixelement abhängt.

3.5. Eigenschaften der Spontanen Emission_[S1]

Konkret deuten läßt sich diese Rate in einen einfachen Ratengleichung,

$$d_t N = -\Gamma N, \quad (53)$$

eine Dgl, die für die Besetzung eines Niveaus $|b\rangle$ ein exponentielles Abklingverhalten voraussagt,

$$N_b(t) = N_b(0) e^{-\Gamma t}. \quad (54)$$

Siehe dazu auch Dem. Abb11.42 und Schillerscriptbilder.

Da die Energie, bzw. Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude ist, muß die Amplitude der Schwingung also mit $e^{-\frac{1}{2}\Gamma t}$ abnehmen. Nach 1.5. gilt, daß eine so gedämpfte nicht erzwungene Schwingung ein lorentzförmiges Intensitätsprofil besitzt. Wie man daran sieht ist die Dämpfung $\beta = \frac{1}{2} \Gamma = \frac{1}{2\tau}$

Die volle Breite am halben Maximum, FWHM, ist bei der spontanen Emission antiproportional, und es gilt (ebenfalls ersichtlich aus einer detaillierten Betrachtung der Lorentztheorie),

$$\delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau} \quad \leftrightarrow \quad \delta\omega = \frac{1}{\tau} \quad (= \Gamma). \quad (55)$$

Dies entspricht in der klassischen Lorentz-Theorie dem freien, gedämpften Fall im Punkt 1.5.1.

3.6. Güte des Übergangs [S1]

Um Übergänge besser beschreiben zu können, führt man den Begriff der Güte ein, eine Form die Resonanzschärfe des Profils zu erfassen, (der Faktor 2π ist Konvention),

$$Q = \frac{\omega_0/2\pi}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0/2\pi}{\Gamma}. \quad (56)$$

Mit (52), $d \approx e a_0$, and $c = \lambda \frac{\omega}{2\pi}$ folgt dann,

$$Q = \frac{\frac{\omega}{2\pi}}{\frac{1}{3\pi} \frac{\omega^3}{\epsilon_0 \hbar c^3} d^2} = \frac{3 \epsilon_0 \hbar c^3 \lambda^2}{c^2 e^2 a_0^2} \approx 50 \left(\frac{\lambda}{a_0} \right)^2$$

Wobei a_0 für den bekannten Bohrschen Radius, $a_0 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi \mu e^2} \approx 0,5 \text{ \AA}$ steht. Wir können nun als Beispiel auch die Lebensdauer eines Zustands berechnen, $\lambda = 0,1 \mu\text{m} \Rightarrow Q = 2 * 10^8$, woraus man eine Lebensdauer von $\tau = \Gamma^{-1} = \frac{Q}{\nu_0} = 70\text{ns}$.

§4 Semiklassisches Modell; Stimulierte Prozesse

Im Gegensatz zur spontanen Emission, die immer auftaucht, wenn sich Teilchen in angeregten Zuständen befinden, sind die stimulierten Prozesse abhängig von einem Strahlungsfeld. In diesem Abschnitt stehen vor allem folgende Fragen im Vordergrund, "Was bestimmt die Stärke der Absorption ?" und, "Welcher Anteil von Atomen ist nach der Einstrahlung von Licht im angeregten Zustand ?"

4.1. Theorie des semiklassischen Modells [4]

Als erstes benötigen wir den Hamiltonian von Atom, Feld und Wechselwirkung (39),

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V + \sum_i \hbar\omega \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) - \frac{q}{m} \mathbf{p} \mathbf{A} + \frac{q^2}{2m} \mathbf{A}^2. \quad (57)$$

Man kann nun davon ausgehen, dass die Wellenfunktionen in den Zuständen $|b\rangle$ und $|a\rangle$ klein gegen die Wellenlänge λ der Strahlung sind. Somit wird der Vektorpotentialoperator durch seinen Ursprungswert genähert,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(0).$$

Um eine einfachere Beschreibung zu erlangen, wird nun der heuristisch nahegelegte H_{ww} aus (38) bewiesen. Die Form $H_{\text{ww}} = -dE$ liegt nahe, weil dies auch klassisch der Dipolenergie entspricht. Diese Form wird durch eine unitäre Transformation erreicht. Unitäre Transformationen erhalten das Eigenwertspektrum eines Operators. Wir definieren den Trafo-Operator,

$$T := \exp\left[-\frac{i}{\hbar} q \mathbf{r} \mathbf{A}(0)\right],$$

der die Koordinaten \mathbf{p}, \mathbf{r} dann so transformiert,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= T \mathbf{r} T^\dagger \\ \mathbf{p}' &= T \mathbf{p} T^\dagger = \mathbf{p} + q \mathbf{A}(0), \end{aligned}$$

sowie den Hamiltonoperator umwandelt,

$$H' = T H T^\dagger = \frac{\mathbf{p}'^2}{2m} + V(\mathbf{r}') + H_{\text{Feld}} - q \mathbf{r}' \sum_i \mathbf{e}_i \{ a_i a_i - a_i^\dagger a_i^\dagger \}.$$

Dies entspricht nun endlich der Form (37), und der hintere Summenterm kann über (33) als E-Feld-Operator an der Stelle $r=0$ identifiziert werden (dadurch fallen nämlich die e^{ikr} Terme weg!). Erklären läßt sich die Wirkung von T wie folgt. Der Impulsoperator ist $p = \frac{\hbar}{i} \nabla$, d.h. räumliche Ableitung, und der T-Operator kann auch geschrieben werden als,

$$T = \exp\left[\sum \{\lambda_j^* a_j - \lambda_j a_j^+\}\right],$$

und zwar durch einsetzen von A (32) in die Definition von T. D.h. der Hamiltonian aus (38) ist bewiesen, und lautet

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) + \sum_i \hbar\omega \left(a_i^+ a_i + \frac{1}{2} \right) - \mathbf{d} \mathbf{E}. \quad (58)$$

Die Hauptnäherung der Semiklassischen Theorie behandelt nun den Dipoloperator d quantenmechanisch und das elektrische Feld klassisch. Dann fällt der Operator H_{Feld} , also die Summe in der Mitte weg, weil dieser Teil nur in dem photonischen Hilbertraum wirkt. Dies funktioniert dann gut, wenn man ein System mit vielen Photonen betrachtet, da nach dem Korrespondenzprinzip makroskopische Effekte die mikroskopischen überwiegen. Für den WW-Operator gilt dann in der Näherung,

$$H_{\text{WW}} = - \hat{\mathbf{d}} \mathbf{E}, \quad (59)$$

$$\mathbf{E} \equiv \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \mathcal{E} e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \right\}. \quad (60)$$

Sinn der Sache:

Eine komplette quantenmechanische Betrachtung ist zu kompliziert, und die nachfolgenden Probleme lassen sich auch in diesem, einfacheren (?) Modell beschreiben.

4.2. Schrödinger Gleichung für das Atom; Rabi-Frequenz [3]

4.2.1. Aufstellung der Bewegungsgleichung für die Entwicklungskoeffizienten

Seien $|b\rangle$ und $|a\rangle$ zwei orthonormale Eigenzustände des Atoms, d.h.:

$$\langle a | b \rangle = 0 \quad \langle a | a \rangle = 1$$

$$\begin{aligned} H_0 |b\rangle &= E_b |b\rangle \\ H_0 |a\rangle &= E_a |a\rangle \end{aligned} \quad (61)$$

Allgemein lässt sich ein Zustand $|\psi\rangle$ nach den Eigenzuständen entwickeln, d.h. bei einem Basisset $\{|\varphi_i\rangle\}$,

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\varphi_i\rangle,$$

und in unserem Fall bedeutet dies,

$$|\psi\rangle = a_1 |a\rangle + a_2 |b\rangle. \quad (62)$$

Die Schrödingergleichung, d.h. die Bewegungsgleichung für $|\psi\rangle$ lautet gemäß (15) dann,

$$i\hbar \partial_t |\psi\rangle = H |\psi\rangle = a_1(t)[E_a + H_{ww}] |a\rangle + a_2(t)[E_b + H_{ww}] |b\rangle. \quad (63)$$

Nun wird von links entweder ein $\langle a|$ oder ein $\langle b|$ anmultipliziert, und es ergeben sich die "Bewegungsgleichungen" für die Vorfaktoren:

$$\begin{aligned} \Rightarrow i\hbar \dot{a}_1(t) &= E_a a_1(t) + a_1(t) \langle a | H_{ww} | a \rangle + \langle a | H_{ww} | b \rangle a_2(t) \\ \Rightarrow i\hbar \dot{a}_2(t) &= E_b a_2(t) + a_1(t) \langle b | H_{ww} | a \rangle + \langle b | H_{ww} | b \rangle a_2(t) \end{aligned}$$

Nutzt man nun (59) so kann man \mathbf{E} aus den Matrixelementen herausziehen, oBdA kann weiterhin $E_a = 0$ und $E_b = \hbar\omega_0$ angenommen werden,

$$\begin{aligned} i\dot{a}_1 &= 0 - \langle a | d | a \rangle a_1(t) \frac{1}{2} \epsilon \frac{\mathcal{E}}{\hbar} e^{-i\omega t} - \langle a | d | b \rangle a_2(t) \frac{1}{2} \epsilon \frac{\mathcal{E}}{\hbar} e^{-i\omega t} \\ &\quad - \langle a | d | a \rangle a_1(t) \frac{1}{2} \epsilon \frac{\mathcal{E}}{\hbar} e^{i\omega t} - \langle a | d | b \rangle a_2(t) \frac{1}{2} \epsilon \frac{\mathcal{E}}{\hbar} e^{i\omega t} \\ &\quad \langle a | d | a \rangle = 0 \end{aligned}$$

Eine analoge Betrachtung für a_2 liefert dann das Gleichungssystem,

$$\begin{aligned} i\partial_t a_1 &= -\frac{1}{2} [\chi_{12} e^{-i\omega t} + \chi_{21}^* e^{i\omega t}] a_2(t), \\ i\partial_t a_2 &= -\frac{1}{2} [\chi_{21} e^{-i\omega t} + \chi_{12}^* e^{i\omega t}] a_1(t) + \omega_0 a_2. \end{aligned} \quad (64)$$

Es beschreibt auf Frequenzbasis die Zeitentwicklung der Vorfaktoren unserer Entwicklung, deren Quadrat die Besetzungswahrscheinlichkeit P_i des i ten Eigenzustands ist. Die Faktoren χ_{ab} sind ein Maß für Atom-Licht-Wechselwirkung, und heißen Rabi-Frequenzen. Sie sind definiert als,

$$\chi_{ab} = \mathbf{q}(\mathbf{r}_{ab}) \epsilon \frac{\mathcal{E}}{\hbar}. \quad (65)$$

4.2.2. Vereinfachungen; Rotating Wave Approximation [3]

Auch können einige Vereinfachungen angebracht werden. Ist z.B. kein Licht an, so gilt $\chi_{ab}=0$ und die Lösungen ergeben sich einfach zu

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a_1(0), \\ a_2(t) &= a_2(0) e^{-i\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Diese Lösungen motivieren, einen ähnlichen Ansatz auch bei Lichtanwesenheit zu probieren:

$$a_1(t) = \bar{a}_1(t) \quad a_2(t) = \bar{a}_2(t) e^{-i\omega t}, \quad (66)$$

damit folgt für (64):

$$\begin{aligned} i \partial_t \bar{a}_1 &= -\frac{1}{2} [\chi_{12} e^{-2i\omega t} + \chi_{21}^*] \bar{a}_2(t), \\ i \partial_t \bar{a}_2 &= -\frac{1}{2} [\chi_{21} + \chi_{12}^* e^{2i\omega t}] \bar{a}_1(t) + (\omega_0 - \omega) \bar{a}_2. \end{aligned}$$

Da nun die $e^{\pm 2i\omega t}$ so schnell oszillieren, mitteln sie sich in realistischen Zeiten heraus. Man nennt diese Überlegung auch rotating-wave-approximation, RWA, sie führt auf noch einfachere Gleichungen:

$$\begin{aligned} i \dot{\bar{a}}_1 &= -\frac{1}{2} \chi^* \bar{a}_2 \\ i \dot{\bar{a}}_2 &= \Delta \bar{a}_2 - \frac{1}{2} \chi \bar{a}_1 \end{aligned} \quad (67)$$

Gleichzeitig eingeführt wurden neue Definitionen eingeführt,

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \omega_0 - \omega, \\ \chi &\equiv \chi_{21} = \chi_{ab} = \mathbf{q}(\mathbf{r}_{21}) \cdot \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\hbar}. \end{aligned} \quad (68)$$

Bei (67) handelt es sich um ein System von gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen, dessen Lösungen,

$$\begin{aligned} \bar{a}_1(t) &= \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2} t\right) + i \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2} t\right) \right] e^{-i \frac{\Delta}{2} t}, \\ \bar{a}_2(t) &= i \frac{\chi}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2} t\right) e^{-i \frac{\Delta}{2} t}. \end{aligned} \quad (69)$$

lauten. Besetzungswahrscheinlichkeiten berechnen sich aus (69) dann mit $P_2(t) = |a_2(t)|^2$, allerdings muß man hier vorsichtig sein, gemeint ist speziell bei Niveau 2, $a_2(t)$, und nicht \bar{a}_2 .

Der Parameter Ω ist die effektive Rabi-Frequenz, mit

$$\Omega = \sqrt{\chi^2 + \Delta^2}, \quad (70)$$

und berücksichtigt noch die Verstimmung, da χ nur die Rabi-Frequenz am Resonanzpunkt ist. Für die Wahrscheinlichkeiten gelten folgende Lösungsfunktionen:

$$P_1(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\Delta}{\Omega} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\chi}{\Omega} \right)^2 \cos \Omega t$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\chi}{\Omega} \right)^2 [1 - \cos \Omega t] = 0.5 \left[1 - \left(\frac{\Delta}{\Omega} \right)^2 \right] [1 - \cos \Omega t]$$
(71)

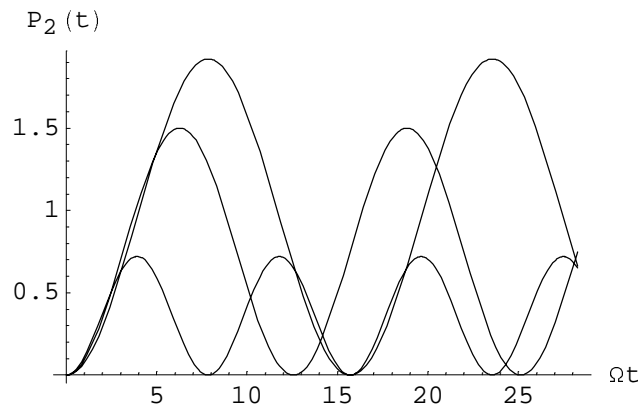


Abb.4.1. Darstellung der Rabi-Oszillationen für verschiedene Δ

4.3. Streuquerschnitt; Störeinflüsse [3]

Liegt ein Ensemble von Teilchen vor, so können diese untereinander stoßen und damit die Wellenfunktion stören. Die Teilchen haben hier eine mittlere thermische Geschwindigkeit, \bar{v} ,

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_A}},$$

und eine mittlere thermische Relativgeschwindigkeit, im Schwerpunktsystem,

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi} \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)}. \quad (72)$$

Die Stoßrate, also der Kehrwert der mittleren Zeit zwischen zwei Stößen, hängt nun ab von der Teilchendichte (Teilchen pro Volumen), je mehr, desto mehr Stöße, der Relativgeschwindigkeit, und einer Stoßfläche, die man Streuquerschnitt nennt. Sie erfasst praktisch die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß.

$$\frac{1}{\tau} \sim N \sigma \bar{v} \quad (73)$$

Konkret für verschiedene Teilchensorten, wobei Teilchen der Sorte X mit Teilchen der verschiedenen Sorten Y stößt,

$$\frac{1}{\tau} \sim \sum_Y N(Y) \sigma(X, Y) \bar{v}_{\text{rel}}(X, Y).$$

Als nächstes stellt sich die Frage wie man sich den Streuquerschnitt besser vorstellen, bzw. nähern kann. Dazu nimmt man die Stoßpartner als "harte" Kugeln an, und nimmt den Streuquerschnitt als Kreisfläche mit einem Radius an, der sich aus dem Radius von Teilchen X und dem von Teilchen Y zusammensetzt. Mit Teilchendurchmessern formuliert,

$$\sigma = \frac{\pi}{4} (d_X + d_Y)^2. \quad (74)$$

Aus Formeln (73),(74) läßt sich jederzeit also die Rate $1/\tau$ berechnen, die aus einer detaillierten Betrachtung später lautet,

$$\frac{1}{\tau_{\text{Stöße}}} = \delta \omega_{\text{Stöße}} = \gamma = 2 N \sigma \bar{v} \quad (! F!!) \quad (75)$$

Schiller: Alternativ $1/\tau = N \sigma \bar{v} \rightarrow \delta \nu = \frac{1}{\pi \tau}$

Anschaulich vorstellen kann man sich die Kollisionen als Phasensprünge in der Elektron-Kern-Oszillation. Es entspricht Punkt 1.5.3. der klassischen Lorentztheorie. Daher auch der Faktor 2 Unterschied.

4.4. Dichtematrix [3] [7] [8]

4.4.1. Grundlegende Theorie

Ein Reiner Zustand beinhaltet ein Maximum an Information über das System. D.h. zu einem kompletten Set kommutierender Operatoren Q_1, Q_2, \dots findet man ein komplettes Set von Eigenwerten q_1, q_2, \dots . Das System ist dann beschrieben durch den Vektor,

$$|q_1 q_2 \dots \rangle.$$

In einem solchen reinen Fall definiert man nun die Dichtematrix so, daß genau das rauskommt, was man haben will, nämlich als,

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (76)$$

Der Vektor $|\psi\rangle$ kann jederzeit als Linearkombination der Eigenkets dargestellt werden, $|\psi\rangle = \sum c_i |i\rangle$, was zu einer Matrixdarstellung führt,

$$\rho_{ij} = \langle i | \rho | j \rangle = \langle i | \psi \rangle \langle \psi | j \rangle = c_i c_j^*. \quad (77)$$

Für den Dichteoperator lassen sich weiterhin einige interessante Eigenschaften finden, so gilt für Spur,

$$\text{Sp}(\rho) = \sum \langle i | \rho | i \rangle = \sum |c_i|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = 1, \quad (78)$$

und für den Erwartungswert eines beliebigen Operators A,

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \psi | A | \psi \rangle = \\ \sum \langle \psi | A | i \rangle \langle i | \psi \rangle &= \sum \langle i | \psi \rangle \langle \psi | A | i \rangle = \text{Sp}(\rho A) \end{aligned}$$

$$\langle A \rangle = \text{Sp}(\rho A). \quad (79)$$

Vorteil des Formalismus ist es, das man nicht mehr die Gesamtwellenfunktion $|\psi\rangle$ benötigt, sondern nur noch die Entwicklungskoeffizienten. Somit ist die Dichtematrix neben Heisenberg, und Schrödinger Bild ein neuer Gesichtspunkt der QM. Bildet man die Zeitableitung, und nutzt die Schrödingergleichung, so erhält man direkt die von Neuman-Gleichung,

$$-i\hbar \partial_t \rho = [\rho, H]. \quad (80)$$

Bei Vielteilchensystemen mit unabhängig präparierten Zuständen, müssen zusätzlich statistische Wahrscheinlichkeiten für die Zustände einbezogen werden. Man kommt dann zu einer Verallgemeinerung des Formalismus,

$$\rho = \sum_n W_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (81)$$

Nun gehorcht ρ nicht mehr einer Schrödingergleichung, sondern der sog. Mastergleichung. Aus der Mastergleichung sind die späteren Ratengleichungen auch explizit herleitbar. Die Matrixschreibweise von (81) wäre dann,

$$\rho_{ij} = \langle i | \rho | j \rangle = \sum_n W_n c_i c_j^*. \quad (82)$$

4.4.2. Dichtematrix der Entwicklungskoeffizienten

Aus den Schrödingerbetrachtungen, d.h. unseren Bewegungsgleichungen (67) läßt sich sofort ins Dichtematrixbild wechseln, in dem man die in (77) aufgestellte Formel für die Elemente von ρ nutzt. Die vorliegende Matrix wird eine 2x2-Matrix, weil wir nur ein atomares 2-Niveausystem als Modell zu Grunde legen, wie bisher auch. Es gelten folgende Beziehungen,

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= a_1 \bar{a}_2^* ; \rho_{21} = a_1^* \bar{a}_2 \\ \rho_{11} &= a_1 a_1^* = |a_1|^2 ; \rho_{22} = \bar{a}_2 \bar{a}_2^* = |\bar{a}_2|^2 \end{aligned} \quad (83)$$

$$\dot{\rho}_{12} = \dot{a}_1 a_2^* + a_1 \dot{\bar{a}}_2^*, \text{ etc.} \quad (84)$$

und man findet durch Einsetzen von (67) folgende neue Entwicklung der Dichtematrixelemente,

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{12} &= i \Delta \rho_{12} + i \frac{\chi}{2} (\rho_{22} - \rho_{11}), \\ \dot{\rho}_{11} &= -\frac{i}{2} (\chi \rho_{12} - \chi^* \rho_{21}), \\ \dot{\rho}_{21} &= \dot{\rho}_{12}^* , \\ \dot{\rho}_{22} &= \dot{\rho}_{11}.\end{aligned}\tag{85}$$

Einsetzen von (83) in die von Neumann Gleichung (80) würde zum selben Ergebnis führen.

Einschub: Zusammenfassung (bisher)

- (1) Durch Aufstellung eines semiklassischen Hamiltonians ließ sich eine Zeitentwicklung der Vorfaktoren der typischen Eigenzustandskombination errechnen.
- (2) In den Vorfaktoren befinden sich Matrixelemente, die (durch teilen durch \hbar) die Stärke der Atom-Licht-Wechselwirkung in Frequenzeinheiten darstellen, die sog. Rabi-Frequenz. Trifft die Einstrahlung nicht genau die Resonanz, so betrachtet man eine effektive Rabi-Frequenz. Da die Entwicklungskoeffizienten die Wahrscheinlichkeiten ergeben, sind die Rabi-O. real meßbare Wahrscheinlichkeitsfluktuationen der Besetzungen.
- (3) Es existieren Störeinflüsse, die naheliegen, die bisherige Theorie zu modifizieren, und mehrere Prozesse mit einzubeziehen. Man geht von der Schrödingerschen Zustandsbetrachtung über in das Dichtematrixbild, in dem keine Zustände, sondern vielmehr die Wahrscheinlichkeiten eine Rolle spielen.

4.4.3. Anschauliche Bedeutung der Dichtematrixeingänge [S1]

Bevor an den Gleichungen (85) Modifikationen vorgenommen werden, sollte man einige Gedanken auf die anschauliche Bedeutung der Dichtematrixelemente verwenden. Am einfachsten erklären sich die Hauptdiagonaleingänge. Nach (77) sind sie einfach die Besetzungswahrscheinlichkeiten. Ist also die Gesamtbesetzungsdichte (Anzahl der Teilchen pro Volumen) bekannt, N , so kann man leicht die Dichten der einzelnen Niveaus bestimmen:

$$\begin{aligned}N_1 &= N \rho_{11}, \\ N_2 &= N \rho_{22}.\end{aligned}\tag{86}$$

Um die Nebendiagonaleingänge zu erklären, benötigt man eine kleine Nebenrechnung,

$$\langle d \rangle = q \langle \psi | r | \psi \rangle = q [a_1^* a_2 \langle a | r | b \rangle + a_2^* a_1 \langle b | r | a \rangle]$$

Wegen (66) folgt dann,

$$\langle d \rangle = q [a_1^* \bar{a}_2 e^{-i\omega t} \langle a | r | b \rangle + \text{c.c.}] \quad (87)$$

Da erst nach Mittelung über alle Atome die Aufstellung einer Dichtematrix einen Sinn macht (vorher könnte man ja auch Schrödingerzustände nehmen),

$$\langle\langle d \rangle\rangle = d_{ab} [e^{-i\omega t} \rho_{21} + e^{i\omega t} \rho_{12}]. \quad (88)$$

Ist kein Licht vorhanden, so wird $\chi=0$, und (85.1) prognostiziert einen exponentiellen Abfall von ρ_{12} , und damit auch ρ_{21} . Dies dämpft über (88) dann auch das Dipolmoment aller Atome zu Null. Ist das Licht an, und die Inversion $(\rho_{22} - \rho_{11})$ zeitlich konstant, so nimmt ρ_{12} einen zeitlichen Grenzwert an, den es sich aber erst nach den Modifikationen lohnt zu berechnen.

4.5. Problemanpassung der Dichtematrix [3]

4.5.1. Elastische Stoßeinflüsse; Phasenstörungen

In Abschnitt 4.3. wurde gezeigt, dass Störeinflüsse gibt, die in der Kern-Elektron-Schwingung Phasenstörungen verursachen. Einen Stoß kann man wieder mit einer Rate erfassen, $\beta=1/\tau$. Die Bewegungsgleichung kann nun einfach modifiziert werden, in dem man folgende Linearität ausnutzt,

$$(\dot{\rho})_{\text{gesamt}} = (\dot{\rho})_{\text{Stöße}} + (\dot{\rho})_{\text{Schrödinger}} \quad (89)$$

Die elastischen Stöße haben nur Einfluß auf den Dipol, und damit nur auf die Nebendiagonalelemente:

$$(\dot{\rho}_{12})_{\text{gesamt}} = (\dot{\rho}_{12})_{\text{elast. Stöße}} + (\dot{\rho}_{12})_{\text{Schrödinger}}$$

Schreibt man also $(\dot{\rho}_{12})_{\text{elast. Stöße}} = 1/\tau$ bei (85) mit dazu, so ergibt sich,

$$\dot{\rho}_{12} = -\left(\frac{1}{\tau} - i\Delta\right)\rho_{12} + i\frac{\chi}{2}(\rho_{22} - \rho_{11}). \quad (90)$$

Nun kann man auch den stationären Grenzwert angeben, der sich wegen $\dot{\rho}_{12}=0$ ergibt zu,

$$\begin{aligned} \rho_{12}^{\text{stationär}} &= \frac{-\chi^*}{2} \frac{\rho_{22} - \rho_{11}}{\Delta + \frac{1}{i\tau}} = \frac{i\chi^*}{2(\beta - i\Delta)} (\rho_{22} - \rho_{11}), \\ \rho_{21}^{\text{stationär}} &= \frac{\chi}{2} \frac{\rho_{22} - \rho_{11}}{\Delta - \frac{1}{i\tau}} = \frac{-i\chi}{2(\beta + i\Delta)} (\rho_{22} - \rho_{11}). \end{aligned} \quad (91)$$

4.5.2. Spontane Emission; Inelastische Stöße

Inelastische Stöße und spontane Emission führen zu einer Abnahme der Teilchendichte im oberen Niveau, zu einer Zunahme im jeweiligen unteren Niveau (geht man weiterhin von einem einfachen 2-Niveau System aus). D.h. nun müssen die Gleichungen in (85) verändert werden, die für die Besetzungsdichten sorgen, ρ_{22} , ρ_{11} .

Auch hier nutzt man wieder die Linearität (89) aus, und kommt auf einen neuen Satz Differentialgleichungen:

$$\dot{\rho}_{22} = -A\rho_{22} - \Gamma_2\rho_{22} + \frac{i}{2}(\chi\rho_{12} - \chi^*\rho_{21}), \quad (92)$$

$$\dot{\rho}_{11} = -A\rho_{11} - \Gamma_1\rho_{11} + \frac{i}{2}(\chi\rho_{12} - \chi^*\rho_{21}). \quad (93)$$

Spontane Emission \uparrow \uparrow Inel.Stöße \uparrow Schrödinger

Das nächste Problem besteht nun darin die gegenseitigen Auswirkungen der neuen Terme in den dynamischen Gleichungen für ρ_{12} zu berichtigen. Dazu betrachtet man zunächst die separierten Probleme.

$$(\dot{\rho}_{22})_{\text{Inelast.Stöße}} = -\Gamma_2\rho_{22} \Rightarrow \rho_{22} = \rho_{22}(0)e^{-\Gamma_2 t} \quad (94)$$

Aufgrund der Eigenschaften der Dichtematrix gilt für Eingänge,

$$\rho_{11}\rho_{22} = \rho_{12}\rho_{21} = |\rho_{12}|^2 \quad (95)$$

Wenn also aufgrund von Verlusten nach (94) gilt,

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t)\rho_{22}(t) &= \rho_{11}(0)e^{-\Gamma_1 t}\rho_{22}(0)e^{-\Gamma_2 t} \\ &= \rho_{11}(0)\rho_{22}(0)e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t} \end{aligned}$$

so folgt nach (95),

$$|\rho_{12}(t)| = \left| \rho_{12}(0) \right| e^{-\frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)}{2}t}. \quad (96)$$

Und nach genau denselben Überlegungen für die spontane Emission,

$$|\rho_{12}(t)| = \left| \rho_{12}(0) \right| e^{-\frac{A}{2}t} \quad (97)$$

Gleichungen (96) und (97) legen nun nahe, die neue Bewegungsgleichung (90) für ρ_{12} nochmals zu modifizieren.

$$\dot{\rho}_{12} = -\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}(A + \Gamma_1 + \Gamma_2) - i\Delta\right)\rho_{12} + i\frac{\chi}{2}(\rho_{22} - \rho_{11}). \quad (98)$$

4.6. Bloch-Vektor-Bild

4.6.1. Definition [S1]

Schrödinger und Dichtematrix sind zwei äquivalente Betrachtungsweisen, wobei sich bei der Dichtematrix als klarer Vorteil die Nichtnotwendigkeit einer Zustandsfunktion erwiesen hat. Der Bloch-Vektor wurde historisch eingeführt, um 2-Level Spin-Systeme zu beschreiben (genau wie die Dichtematrix auch), und seine Elemente sind noch wesentlich näher an der Anschauung. So bildet das Bloch-Bild ein drittes wiederum völlig äquivalentes Beschreibungssystem der atomaren Dynamik.

Man definiert die Komponenten des Bloch-Vektors wie folgt,

$$\begin{aligned}u &= \rho_{21} + \rho_{12} \\v &= i(\rho_{21} - \rho_{12}) \\w &= \rho_{22} - \rho_{11}\end{aligned}\tag{99}$$

*4.6.2. Eigenschaften des Blochvektors

Komponente w ist zunächst am einfachsten als Inversion zu deuten, d.h. die Differenz der Wahrscheinlichkeit im oberen oder im unteren Zustand zu sein. u, v nehmen Bezug auf die Phase des Systems, und sind direkt verknüpft mit dem Dipolmoment des Atoms (der Atome). Ohne Beweis: u ist die dispersive Komponente des Dipolmoments, $(-v)$ beschreibt die Stärke der Absorption durch das Dipolmoment.

Befindet sich die Dichtematrix in einem reinen Zustand, so gilt für den Blochvektor $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, d.h. der Vektor beschreibt eine Sphäre, die Bloch-Sphäre.

Schreibt man den Vektor explizit,

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\tag{100}$$

so sind sämtliche Bewegungsgleichungen in einer zusammenfaßbar,

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\varphi},\tag{101}$$

wobei $\boldsymbol{\xi}$ ein konstanter Vektor ist, der von den Randbedingungen abhängt, und um den $\boldsymbol{\varphi}$ präzediert. Nun ist auch die RWA-Näherung erklärbar, denn sie stellt praktisch eine Transformation in das Rotationssymmetrische System von $\boldsymbol{\xi}$ dar.

4.6.3. Dynamische Gleichungen für ein mittleres Atom [3]

In unserer Betrachtung müssen wir um realistische Beschreibung zu erhalten, die Spontane Emission, elastische Kollisionen, Zerfälle in andere Zustände (inel.) und Ensemblebetrachtungen einbeziehen. Wir erhalten folgendes Gleichungssystem,

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_{11} &= -\Gamma_1 \rho_{11} + A\rho_{22} + \frac{1}{2} \chi v \\
 \dot{\rho}_{22} &= -(A + \Gamma_2) \rho_{22} - \frac{1}{2} \chi v \\
 \dot{v} &= -\beta v + \Delta u + \chi w \\
 \dot{u} &= -\beta u - \Delta v \\
 \beta &= \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} (A + \Gamma_1 + \Gamma_2) \equiv \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2\tau_1} \\
 \tau_1^{-1} &= A + \Gamma_1 + \Gamma_2
 \end{aligned} \tag{102}$$

Betrachtet man den Spezialfall $\Gamma_1, \Gamma_2 = 0$, so erhält man die üblichen Bloch Gleichungen (99). Eine weitere wichtige Zwischengleichung (!nicht im Schillerscript enthalten!) erhält man, wenn man unser Bloch-Gleichungssystem (102) in komplexer Form wie folgt ableitet,

$$\dot{u} - i\dot{v} = -(\beta + i\Delta)(u - iv) - i\chi w, \tag{B1a}$$

$$\dot{w} = -\frac{1}{\tau_1} (1 + w) + \frac{i}{2} [\chi(u + iv) - \chi^*(u - iv)] \quad . \tag{B1b}$$

4.7. Aufstellung der Dichterraten [3]

Ausgehend von den in §4 hergeleiteten Formeln, sollen nun die sog. Ratengleichungen formuliert werden. Zunächst wird jedoch eine im Laser gültige Näherung angebracht,

$$\frac{1}{\tau} \gg A, \Gamma_1, \Gamma_2. \tag{103}$$

Dann ist $\dot{\rho}_{12} \simeq 0$, wenn sich ρ_{11}, ρ_{22} nur langsam. Wir können jetzt ρ_{12} und ρ_{21} adiabatisch eliminieren (schnell reagierender Freiheitsgrad), und nutzen den in 4.5.1. gefundenen stationären Grenzwert für ρ_{12} (91),

$$\begin{aligned}
 \rho_{12}^{\text{stationär}} &= \frac{-\chi^*}{2} \frac{\rho_{22} - \rho_{11}}{\Delta + \frac{1}{i\tau}} = \frac{i\chi^*}{2(\beta - i\Delta)} (\rho_{22} - \rho_{11}), \\
 \rho_{21}^{\text{stationär}} &= \frac{\chi}{2} \frac{\rho_{22} - \rho_{11}}{\Delta - \frac{1}{i\tau}} = \frac{-i\chi}{2(\beta + i\Delta)} (\rho_{22} - \rho_{11}).
 \end{aligned} \tag{104}$$

Offensichtlich ist dann der hintere Term in den Gleichungen (92), (93) leicht zu finden, setzt man nun (!) $\beta \approx \frac{1}{\tau}$

$$\chi \rho_{12} - \chi^* \rho_{21} = \frac{i |\chi|^2 \beta}{\Delta^2 + \beta^2} (\rho_{22} - \rho_{11}), \quad (105)$$

was dann direkt weiter eingesetzt werden kann,

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= +A\rho_{22} - \Gamma_1 \rho_{11} + \frac{1}{2} \frac{i |\chi|^2 \beta}{\Delta^2 + \beta^2} (\rho_{22} - \rho_{11}), \\ \dot{\rho}_{22} &= -A\rho_{22} - \Gamma_2 \rho_{22} - \frac{1}{2} \frac{i |\chi|^2 \beta}{\Delta^2 + \beta^2} (\rho_{22} - \rho_{11}). \end{aligned} \quad (106)$$

Je nach Vorzeichen beschreiben die hinteren Terme die stimulierte Absorption, bzw. Emission. Beide sind proportional zu Lichtintensität, die durch $|\chi|^2$ gegeben ist, und zum Besetzungsunterschied. Hier ist ebenfalls das Lorentzprofil enthalten. Um nun weitere Vereinfachungen zu machen, benötigen wir den expliziten Ausdruck für χ , weiter oben in Formel (68),

$$\chi \equiv \mathbf{q}(\mathbf{r}_{21} \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\mathcal{E}}{\hbar} \quad (107)$$

Da der Faktor $\frac{1}{2} \frac{i |\chi|^2 \beta}{\Delta^2 + \beta^2}$ vor der Besetzungsinversion steht, muß er die Dimension Rate haben. Es macht daher Sinn genau diesen Faktor als Absorptionsrate zu definieren,

$$\Gamma_{\text{Absorption}} \equiv \frac{1}{2} \frac{i \left| \mathbf{q}(\mathbf{r}_{21} \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\mathcal{E}}{\hbar} \right|^2 \beta}{\Delta^2 + \beta^2}. \quad (108)$$

4.8. Einige Definitionen aus der Strahlungslehre

Unter dem Strahlungsfluß versteht man die abgestrahlte Leistung, also die Energie pro Zeiteinheit, die vom Strahler emittiert wird.

$$\phi \equiv \frac{dW}{dt} \quad (109)$$

Betrachtet man einen Strahler der Fläche A_1 , dessen Flächennormale mit der Verbindungslinie einen Winkel ϑ einschließt, so sieht der Empfänger eine Fläche $A_1^* = A_1 \cos \vartheta$.

Man definiert den Raumwinkel als die Maßzahl der vom Strahlenkegel aus dem Einheitskreis ausgeschnittenen Kugelfläche. Für den Raumwinkel Ω gilt dann bei einer Kugelfläche A mit dem Radius r :

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \text{ sr.} \quad (110)$$

Da die aus einem Flächenelement dA in einen Raumwinkel $d\Omega$ emittierte Leistung proportional zum Produkt $dA \cdot d\Omega$ ist, läßt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$\phi = \frac{dW}{dt} = E \cdot dA d\Omega.$$

Die so definierte Proportionalitätskonstante heißt Emissionsvermögen an der Oberfläche.

Aus (3) und (4) kann eine nächste Größe des Strahlers angegeben werden, die Strahlstärke I . Sie beschreibt die Dichte des Flusses pro Raumwinkel, wo bei i.a. $W=W(\vartheta)$:

$$I \equiv \frac{d\phi}{d\Omega} = \frac{d^2 W}{dt d\Omega}. \quad (111)$$

Zusätzlich kann diese Strahlstärke auf die reale Abstrahlfläche A_1^* bezogen werden, und man erhält die Strahlungsdichte L :

$$L \equiv \frac{dI}{dA_1^*} = \frac{d^2 \phi}{d\Omega d(A_1 \cos\vartheta)} = \frac{d^3 W}{d\Omega d(A_1 \cos\vartheta) dt} \quad (112)$$

$$\rightarrow \text{allgemein } \frac{dW}{dt} = L dA d\Omega$$

$$\Rightarrow I(\vartheta) = \int L \cos\vartheta dA \quad (113)$$

Gilt zusätzlich $I \sim \cos\vartheta$, so folgt:

$$\Rightarrow L = \frac{I}{A_1^*} = \frac{I}{A_1 \cos\vartheta} = \frac{I_0}{A_1} \Leftrightarrow I = I_0 \cos\vartheta. \quad (114)$$

Gleichung (8) heißt auch Lambertsches Gesetz. Anschaulich erscheint die Fläche egal von welcher Betrachtungsrichtung immer gleich hell. D.h. je kleiner die beobachtete Fläche, umso kleiner auch die Strahlstärke. Wird die Strahlstärke von einem Punkt in alle Richtungen aufgetragen, so bildet die Einhüllende, die sog. Indikatrix, einen Kreis.

Als letzte Größe findet sich die spezifische Ausstrahlung M , bei der man den Strahlungsfluß in den Halbraum betrachtet, und auf die Strahlfläche A_1 bezieht.

$$M \equiv \frac{d\phi}{dA_1} = \frac{d^2 W}{dt dA_1}. \quad (115)$$

Unter der Intensität einer elm. Welle versteht man die Leistung, die pro Fläche deponiert wird, sie entspricht der Bestrahlungsstärke auf die Empfängerfläche in der Strahlungslehre,

$$I = \frac{d^2 E}{dA dt} = \frac{d\phi}{dA}. \quad (116)$$

Zu einer Welle der Amplitude \mathcal{E} gehört nach allgemeiner Theorie die Intensität,

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}^2}{R_V}. \quad (117)$$

und R_V ist die Vakuumimpedanz für Licht,

$$R_V = \frac{1}{c \epsilon_0} = 377 \Omega. \quad (118)$$

Letzlich definiert man den Photonenfluß als Anzahl der Photonen pro Fläche und Zeiteinheit, als eine mit $\frac{1}{E}$ normierte Intensität,

$$F = \frac{1}{E} \frac{d^2 E}{dA dt} = \frac{I}{\hbar \omega}. \quad (119)$$

4.9. Aufstellung der Ratengleichungen [3]

4.9.1. Absorptionsquerschnitt

Mit den in 5.1. und 5.2. zusammengefaßten Ergebnisse ist es nun möglich die Ratengleichungen zu formulieren. Zunächst sollten wir beachten, das man zwar in Gleichung (107) das Matricelement jeweils mit Tabellen nachschauen oder analytisch berechnen könnte, dies aber nicht immer nötig ist. So ist für die meisten Anwendungen nur eine Mittelung von $|\chi|^2$ über alle Orientierungen von Interesse.

$$\begin{aligned} \langle |\mathbf{q} \mathbf{r}_{12} \mathcal{E}|^2 \rangle_{\text{alle Richtungen}} &\equiv \langle |\mu \mathcal{E}|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{3} q^2 \mathbf{r}_{21} \mathbf{r}_{12} |\mathcal{E}|^2 = \frac{1}{3} d^2 |\mathcal{E}|^2 \end{aligned} \quad (120)$$

(120) ist gleichzeitig definierende Gleichung für d , und D^2 ,

$$\mathbf{d} = q \mathbf{r}_{21}; \quad \mu = \epsilon \mathbf{d},$$

$$d^2 = |\mathbf{d}|^2 = q^2 (|x_{12}|^2 + |y_{12}|^2 + |z_{12}|^2). \quad (121)$$

Dann kann man die Absorptionsrate wie folgt ausdrücken,

$$\Gamma_{\text{Absorption}} = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{d^2 |\mathcal{E}|^2 \beta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}, \quad (122)$$

$$F = \frac{I}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{1}{2} c\epsilon_0 \mathcal{E}^2,$$

$$\Gamma_{\text{Absorption}} = \sigma F. \quad (123)$$

wobei σ der Absorptionsquerschnitt ist. Den Wirkungsquerschnitt findet man schließlich über $\sigma = \Gamma/F$,

$$\sigma = \frac{\frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{d^2 |\mathcal{E}|^2 \beta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}}{\frac{1}{\hbar\omega} \frac{1}{2} c\epsilon_0 \mathcal{E}^2}$$

$$\sigma(\Delta) = \frac{1}{3} \frac{d^2 \omega}{\epsilon_0 \hbar c} \frac{\beta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2} \quad (124)$$

Klassisch gesehen hat das Atom eine Fläche σ , mit der es Photonen aus einem Strahl absorbiert. Im Resonanzfall ist σ am größten. Interessant ist das σ also nicht eine rein atomare Eigenschaft ist, sondern auch eine Funktion der eingestrahlten Frequenz.

$$\sigma(0) = \frac{d^2 \omega_0}{3 \epsilon_0 c \hbar \beta}. \quad (125)$$

σ ist groß für erlaubte Übergänge, fällt mit zunehmender transversaler Relaxationsrate β ab. Typische Werte hängen von β ab. Nähert man z.B. im Gleichungspaket (102) den Wert von β für überwiegene spontane Emission, so erhält man,

$$\beta = \frac{A}{2} = \frac{\omega_0^3 d^2}{6 \pi \epsilon_0 \hbar c^3} \Rightarrow \sigma_{\text{res}} = 2 \pi \frac{c^2}{\omega_0^2} = \frac{\lambda_0^2}{2 \pi} \simeq 4 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2$$

In der Praxis domiert aber der Zerfall, $1/\tau$, und dieser ergibt folgende typische Werte,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Rubin}} &\simeq 10^{-19} \text{ cm}^2 \\ \sigma_{\text{Nd:YAG}} &\simeq 10^{-19} \text{ cm}^2 \\ \sigma_{\text{Farbstoffe}} &\simeq 10^{-16} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

4.9.2. Absorptionskoeffizient

Dem Lichtstrahl gehen durch die Absorption Photonen verloren, und zwar gemäß,

$$-\Delta F = \sigma F N \Delta z, \quad (126)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dF}{dz} = -\sigma N F,$$

$$\Leftrightarrow F(z) = F(0) e^{-\sigma N z} \stackrel{!}{=} F(0) e^{-az},$$

$$a = \sigma N. \quad (127)$$

Dies ist eine dem Lambert-Beerschen Gesetz entsprechende exponentielle Abschwächung mit dem Absorptionskoeffizienten a .

4.9.3. Übergang zu den Besetzungsdichten

Um nun endlich die Ratengleichungen zu erhalten, nutzen wir das Korrespondenzprinzip (86), was die Dichten mit den Dichtematrixeinträgen verknüpft. Die Ratengleichungen lauten dann einfach,

$$\begin{aligned} N_1 &= -\Gamma_1 N_1 + A N_2 + \sigma F (N_2 - N_1), \\ N_2 &= -\Gamma_2 N_2 - A N_2 - \sigma F (N_2 - N_1). \end{aligned} \quad (128)$$

An dieser Stelle ist die eigentliche Herleitung der Ratengleichungen bereits beendet. Sie folgen aus "first principles" der Quantenphysik, und stellen die zentralen Bewegungsgleichungen der Laserphysik dar.

4.9.4. Diskussion

Liegt ein geschlossenes 2-Niveau-System vor, so gilt für die Raten $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, und wir können für (128) einfach die Lösung angeben. $N = N_1 + N_2$, und für (128) ergibt sich,

$$\begin{aligned} \partial_t N_2[t] &= -A N_2[t] - \sigma F (2 * N_2[t] - N), \\ \text{DSolve}[\partial_t N_2[t] == -A N_2[t] - \sigma F (2 * N_2[t] - N), N_2[t], t], \\ N_2[t] &\rightarrow \frac{N \sigma F}{A + 2 \sigma F} + e^{t(-A - 2 \sigma F)} C[1]. \end{aligned}$$

$$N_2(t) = N_2[0] e^{t(-A - 2 \sigma F)} + \frac{N \sigma F}{A + 2 \sigma F} (1 - e^{t(-A - 2 \sigma F)}). \quad (129)$$

Betrachtet man diese Lösung in hinreichend langer Zeit, so erhält man,

$$S \equiv \frac{N_2(\infty)}{N} = \frac{\sigma F}{A + 2 \sigma F} \quad (130)$$

Und ist das obere Niveau gleichbesetzt wie das untere, so liegt Sättigung vor, dies passiert für $\sigma F \gg A$ und ist ebenfalls aus (130) ersichtlich. Da σ eine Funktion der Verstimmung ist, gilt mit $F = \frac{I}{\hbar \omega}$

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta) F &= \frac{\frac{1}{2} |\chi|^2 \beta}{\Delta^2 + \beta^2}, \\ \frac{N_2(\infty)}{N} &= \frac{1}{2} \frac{\frac{|\chi|^2 \beta}{A}}{\Delta^2 + \beta^2 + \frac{|\chi|^2 \beta}{A}}. \end{aligned} \quad (131)$$

Nach den allgemeinen Beschreibungen in 1.5. ist ersichtlich, daß wiederum ein Lorentzprofil vorliegt, für dessen FWHM gilt (Verleiche mit 1.5.1.,1.5.2.),

$$\frac{\delta\omega}{2} = \sqrt{\beta^2 + \frac{|\chi|^2 \beta}{A}}. \quad (132)$$

was sich auch schreiben läßt als,

$$\delta\omega = 2\beta \sqrt{1 + \frac{2\sigma(0)F}{A}} \sim \sqrt{F}. \quad (133)$$

Die Anregung nennt man daher leistungsverbreitert oder auch sättigungsverbreitert. Wegen der Proportionalität zwischen F,I, und P werden diese Begriffe oft auch synonym gebraucht. Was nun folgt ist eine Darstellung der Lösungsfunktion der Ratengleichung. Sie zeigt das "normierte" zeitliche Verhalten von $N_2(t)$, die konkreten Werte kann man der Variablendeklaration entnehmen:

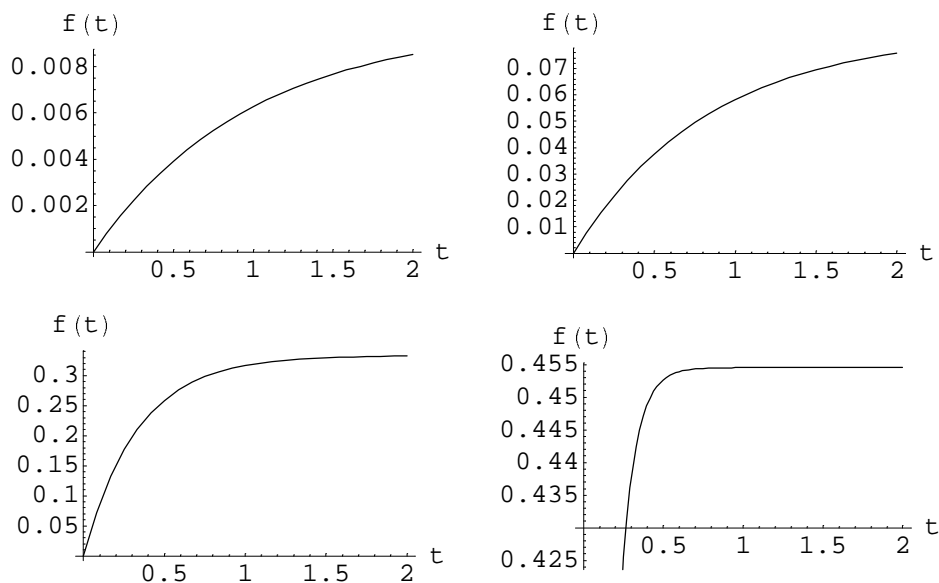


Abb.4.2. Niveaudynamik für verschiedene σF

Diese Bilder sollen eigentlich nur die Auswirkung der Sättigung für verschieden starke Anregungsstärken zeigen. Man sieht, daß bei einem Startpunkt $N_2(0)=0$ stets gilt $N_2 \ll N/2$.

(*) Eine weitere Grafik zeigt die Leistungsverbreitung.

4.10. Maxwell-Bloch Gleichungen [3]

Die Ratengleichungen stellen praktisch die "Bewegungsgleichungen" des Lasersystems dar. Sie beschreiben die Veränderung eines atomaren Systems durch ein eingestrahlt Lichtfeld. Was nun noch fehlt ist die Beeinflussung eben jener Veränderungen auf das Lichtfeld. So wirkt ja die stimulierte Emission verstärkend, die Absorption aber abschwächend. Eine künstliche Besetzungsinversion würde also zu einer Verstärkung führen. Zur Vereinfachung geht man von einer Welle aus, die sich in z-Richtung ausbreitet. Eine solche elm. Welle läßt sich stets durch ihre Polarisation ε , ihre Amplitude $\mathcal{E}(z,t)$ und ihre Phase beschreiben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathcal{E}(z, t) e^{-i(\omega t - kz)}. \quad (134)$$

\mathcal{E} kann aus den Maxwell-Gleichungen bestimmt werden, wozu allerdings die Polarisation des Mediums benötigt wird. Daß atomare System gibt nun Aufschluß über die Polarisation. Unser Feld muß außerdem der (aus den Maxwell-Gleichungen herleitbaren) Wellengleichung genügen.

$$\square \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \partial_t \mathbf{P}(\mathbf{r}, t). \quad (135)$$

$$\left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \partial_t \mathbf{P}(z, t). \quad (136)$$

In (134) beschreibt $\mathcal{E}(r,t)$ die Amplitude. Im Gegensatz zur gesamten Oszillation des E-Feldes, nehmen wir nun an das sich die Amplitude nur langsam auf der Längenskala von λ , und auf der Zeitskala von ω^{-1} ändert. Diese Näherung nennt man SVEA (slowly varying envelope approximation). D.h. es gilt,

$$\lambda \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right| \ll \mathcal{E}; \quad \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right| \ll k \mathcal{E}; \quad \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right| \quad (137)$$

$$|\dot{\mathcal{E}}| \ll \omega |\mathcal{E}|.$$

$$|\rho_{21}| \ll \omega |\rho_{12}|.$$

Ein ähnlicher Ansatz greift auch für die Polarisation \mathbf{P} , die man zunächst erst einmal näher beschreiben muß. Anschaulich kann man sich vorstellen, daß \mathbf{P} proportional zur Ladung q , gar zum Dipolmoment \mathbf{d} ist. Weiterhin ist die Polarisation um so größer, desto höher die Teilchendichte ist. Daher liegt folgende Formel nahe,

$$\mathbf{P} = 2 N q r_{12} a_1^* a_2$$

Ein flüchtiger Blick auf (87) hilft nun die nächste Gleichung zu glauben (über $\langle \mathbf{d} \rangle$ gleichsetzen!),

$$\mathbf{P}(z, t) = \operatorname{Re}(2 N \mu^* \rho_{21} e^{-i\omega t + ikz}) \quad (138)$$

Nach Substitution von (138) und (134) in (136), erhalten wir ,

$$\begin{aligned} \left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathcal{E}(z, t) e^{-i\omega t + ikz} &= \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \partial_t^2 \{ 2 N \mu^* \rho_{21} e^{-i\omega t + ikz} \} \\ \Leftrightarrow \left\{ \partial_z (e^{-i\omega t + ikz} \partial_z \mathcal{E} + \varepsilon ik e^{-i\omega t + ikz}) - \frac{1}{c^2} \partial_t (e^{-i\omega t + ikz} \partial_t \mathcal{E} - i\omega \mathcal{E} e^{-i\omega t + ikz}) \right\} &= \\ \frac{2 N \mu^*}{c^2 \varepsilon_0} \partial_t (\dot{\rho}_{21} e^{-i\omega t + ikz} - i\omega \rho_{21} e^{-i\omega t + ikz}) & \\ \Leftrightarrow \left(ik e^{-i\omega t + ikz} \partial_z \mathcal{E} + e^{-i\omega t + ikz} \partial_z^2 \mathcal{E} + ike^{-i\omega t + ikz} \partial_z \mathcal{E} - k^2 \mathcal{E} e^{-i\omega t + ikz} \right) - & \\ \frac{1}{c^2} \left(-i\omega e^{-i\omega t + ikz} \partial_t \mathcal{E} + e^{-i\omega t + ikz} \partial_t^2 \mathcal{E} - \omega^2 \mathcal{E} e^{-i\omega t + ikz} - i\omega e^{-i\omega t + ikz} \partial_t \mathcal{E} \right) &= \\ \frac{2 N \mu^*}{c^2 \varepsilon_0} \left(\dot{\rho}_{21} e^{-i\omega t + ikz} - i\omega \rho_{12} e^{-i\omega t + ikz} - i\omega \rho_{21} e^{-i\omega t + ikz} - \omega^2 \rho_{21} e^{-i\omega t + ikz} \right) & \end{aligned}$$

An dieser Stelle kann nun die Näherung der langsam veränderlichen Amplitude eingesetzt werden. Die grauen Terme heben sich weg, die 2 kürzt sich raus, $\omega = ck$ wird substituiert, und für die kursiven Terme greift das Vereinfachungspaket (137):

$$\Rightarrow ik \partial_z \mathcal{E} + \frac{1}{c^2} i\omega \partial_t \mathcal{E} = - \frac{N \mu^*}{\varepsilon_0 c^2} \omega^2 \rho_{21},$$

$$ikc \partial_z \mathcal{E} + \frac{1}{c} ik \partial_t \mathcal{E} = - \frac{N \mu^*}{\varepsilon_0 c^2} \omega^2 \rho_{21},$$

$$\left(\partial_z + \frac{1}{c} \partial_t \right) \mathcal{E} = \frac{i N \mu^*}{k \varepsilon_0 c^2} c^2 k^2 \rho_{21}.$$

Eine letzte Umformung führt dann auf die sog. reduzierte Wellengleichung,

$$\left(\partial_z + \frac{1}{c} \partial_t \right) \mathcal{E} = \frac{ik N \mu^*}{\varepsilon_0} \rho_{21}. \quad (139)$$

Offensichtlich kann man mit den Blochschen Definitionen aus §4 (139) umschreiben, und somit erhält man die sog. Maxwell Bloch-Gleichungen, 2 gekoppelte Differentialgleichungen im Argument $u - iv$:

$$\dot{u} - i\dot{v} = -(\beta + i\Delta)(u - iv) - i\chi w \quad (\mathcal{B}1a)$$

$$\dot{w} = -\frac{1}{\tau_1} (1 + w) + \frac{i}{2} [\chi(u + iv) - \chi^*(u - iv)] \quad (\mathcal{B}1b)$$

$$\left(\partial_z + \frac{1}{c} \partial_t \right) \mathcal{E} = \frac{ik N \mu^*}{\varepsilon_0} \frac{(u - iv)}{2} \quad (\mathcal{B}2)$$

Sinn dieser Gleichungen ist die konsistente Beschreibung von Atom-Licht-Wechselwirkungen. Die Ratengleichungen bilden ein ähnliches System, und beschreiben die Erzeugung und Vernichtung von Resonatorphotonen durch das gewählte Resonatormedium. Nutzt man das Bloch-Vektorbild, indem die Dichtematrixeingänge mit neuen Variablen, den Blochvektoreinträgen verknüpft werden, und die Maxwell-Bloch-Gleichungen, so erhält man eine vollständige Quantentheorie des Lasers.

Anmerkung: Auch (139) wird manchmal Maxwell-Bloch-Gleichung genannt.

§5 Lasergleichungen

5.1. Verstärkung und Abschwächung [3]

Die bisher beschriebenen Gleichungen werden zunächst nur stationär betrachtet. Das hat den Vorteil, dass alle zeitlichen Ableitungen 0 werden, und die jeweiligen Differentialgleichungen einfacher werden. Die Gleichungen (104) bilden die adiabatischen Näherungen für ρ_{12} und ρ_{21} , und werden hier für die weiterführende Betrachtung wieder aufgegriffen. Die Feldamplitude \mathcal{E} ist identisch mit \mathcal{E} .

$$\rho_{21}^{\text{stationär}} = \frac{-i\chi}{2(\beta + i\Delta)} (\rho_{22} - \rho_{11}),$$

nach Ersetzung von $\chi = q r_{12} \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\hbar}$, und dieser kleinen Nebenrechnung,

$$\frac{-i}{\beta + i\Delta} = \frac{1}{i\beta - \Delta} = \frac{(i\beta + \Delta)}{-(\beta^2 + \Delta^2)},$$

folgt,

$$\rho_{21} = -\frac{1}{2} \frac{(i\beta + \Delta)}{(\beta^2 + \Delta^2)} \frac{\mathbf{d} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}}{\hbar} (\rho_{22} - \rho_{11}).$$

Die reduzierte Wellengleichung (139) liefert unter stationären Bedingungen,

$$\frac{d}{dz} \mathcal{E}(z) = -\frac{ikN\mu^*}{\varepsilon_0} \frac{1}{2} \frac{(i\beta + \Delta)}{(\beta^2 + \Delta^2)} \frac{\mathbf{d} \boldsymbol{\varepsilon}}{\hbar} (\rho_{22} - \rho_{11}) \mathcal{E}(z).$$

μ^* ist wie vorher die Projektion des komplexen Dipolmoments, $\mu^* = \boldsymbol{\varepsilon}^* \mathbf{d}, \mu = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{d}$. Mit $|\mu|^2 = \mu^* \mu$ ergibt sich,

$$\frac{d}{dz} \mathcal{E}(z) = \frac{k |\mu|^2}{2 \hbar \varepsilon_0} N \frac{\beta - i\Delta}{\beta^2 + \Delta^2} (\rho_{22} - \rho_{11}) \mathcal{E}(z). \quad (140)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nun einige Schlüsse ziehen. Sie hat die typische Form einer gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung, und somit als Lösung einen exponentiellen Anstieg oder Abfall. Über (140) definiert man den Absorptionskoeffizienten α ,

$$\frac{d}{dz} \mathcal{E}(z) = \alpha \mathcal{E}(z), \quad (141)$$

$$\alpha \equiv \frac{k |\mu|^2}{2 \hbar \varepsilon_0} N \frac{\beta - i\Delta}{\beta^2 + \Delta^2} (\rho_{22} - \rho_{11}). \quad (142)$$

Lösung für (141) ist,

$$\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}(0) e^{\alpha z}. \quad (143)$$

Um die Intensität zu bestimmen, wird folgende Proportionalität betrachtet:

$$\begin{aligned} I &\sim |\mathcal{E}|^2 \Rightarrow d_z I \sim \mathcal{E}^* d_z \mathcal{E} + \mathcal{E} d_z \mathcal{E}^* \\ &\Rightarrow d_z I \sim \alpha |\mathcal{E}|^2 + \alpha^* |\mathcal{E}|^2 \Rightarrow d_z I = 2 \operatorname{Re}(\alpha) I(z) \end{aligned}$$

Mit dem Realteil von α , $\alpha_r = \operatorname{Re}(\alpha)$, folgt die Lösung,

$$I(z) = I(0) e^{2\alpha_r z}, \quad (144)$$

α_r kann als Funktion des Arguments $\rho_{22} - \rho_{11}$ direkt aus (142) berechnet werden, es muß lediglich der $i\Delta$ Term gestrichen werden.

$$\alpha_r[\rho_{22} - \rho_{11}] = \frac{k |\mu|^2}{2 \hbar \epsilon_0} N \frac{\beta}{\beta^2 + \Delta^2} (\rho_{22} - \rho_{11}) \quad (145)$$

Hier wird die Notwendigkeit der Inversion klar, steuert doch das Vorzeichen von α_r , ob eine Verstärkung oder Abschwächung vorliegt,

$$\rho_{22} - \rho_{11} < 0 \quad \text{"Normalfall"} \rightarrow \text{Abschwächung (Lambert - Beer)}$$

$$\rho_{22} - \rho_{11} > 0 \quad \text{"Inversion"} \rightarrow \text{Verstärkung}$$

Es ist also sinnvoll den Absorptionskoeffizienten zu benutzen, um eine Verstärkung ("gain") zu definieren. Der in (124) definierte Wirkungsquerschnitt läßt sich mit dem Koeffizienten α_r in Relation setzen, beachten muß man allerdings das $|\mu|^2 = \frac{1}{3} d^2$ ist, und das $N(\rho_{22} - \rho_{11}) = N_2 - N_1$:

$$2\alpha_r = \sigma(\Delta)(N_2 - N_1) \equiv g \quad (146)$$

5.2. Vier-Niveau-System [3][S1]

Im 2-Niveau-System ist eine Inversion unmöglich. Es ist also zwingend notwendig, weitere Niveaus in der Betrachtung mit einzubeziehen. Das wichtigste Modellsystem für die Lasertheorie ist das 4-Niveau-System. Beispielsweise gilt für das 2te Niveau folgende Dynamik,

$$d_t N_2 = \Gamma_3 N_3 - A N_2 - \sigma(N_2 - N_1) \frac{I}{\hbar \omega}.$$

Diese kann vereinfacht werden, wenn man berücksichtigt, das in den meisten Fällen das 3. Niveau sich so schnell entleert, das es als leer angenommen werden kann. Anschaulich wird dann direkt ins 2. Level gepumpt. Der Term $\Gamma_3 N_3$ könnte durch $R N_0$ ersetzt werden. Man nennt dies eine adiabatische Näherung. Mathematisch exakt, formt man die Rategleichung des 3ten Niveaus um,

$$d_t N_3 = 0 = RN_0 - \Gamma_3 N_3 \Leftrightarrow N_3 = \frac{RN_0}{\Gamma_3},$$

eingesetzt in obige Ratengleichung für Level 2 liefert dann das bereits vermutete Ergebnis.

Die Lasergleichungen für diese Variante lauten mit der adiabatischen Näherung für N_3 ,

$$d_t N_0 = -RN_0 + \Gamma_1 N_1 \quad (147)$$

$$d_t N_1 = -\Gamma_1 N_1 + AN_2 + \sigma(N_2 - N_1) \frac{I}{\hbar\omega} \quad (148)$$

$$d_t N_2 = RN_0 - AN_2 - \sigma(N_2 - N_1) \frac{I}{\hbar\omega} \quad (149)$$

$$\left(\frac{1}{c} \partial_t - \partial_z \right) I = \sigma(N_2 - N_1) I \quad (150)$$

Dies ist der vollständige Satz an Lasergleichungen. Sie enthalten alle notwendigen Informationen um den kompletten Laser zu beschreiben. Nur zur besseren Interpretation, werden die folgenden Abschnitte und Definitionen benötigt.

5.3. Laserbetrieb [3]

5.3.1. Ringresonator

Am einfachsten läßt sich der Laserbetrieb am Beispiel des Ringlasers verdeutlichen. Dazu soll folgende Abbildung helfen:

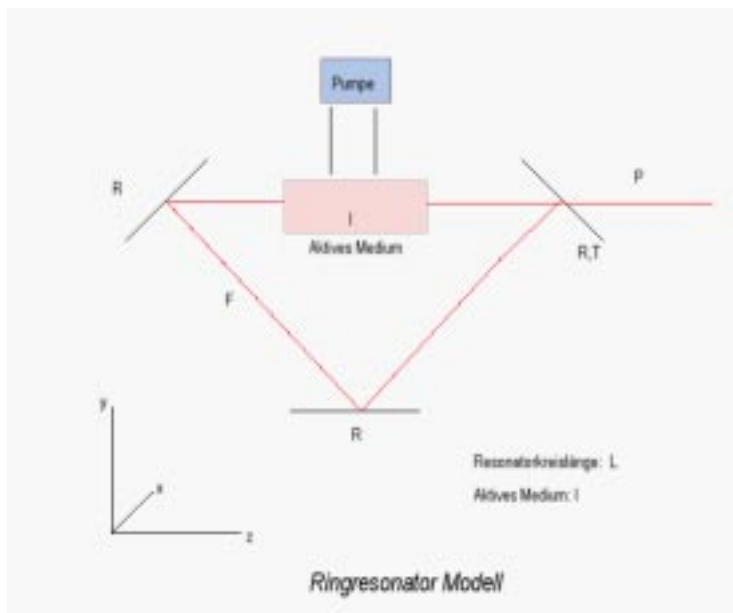


Abb.5.1. Ringresonator, Umlauf, Reflektivitäten

Im Ringresonator läuft das Licht im Kreis, und zwar in beide Richtungen, solange, wie keine anderen, optischen Hilfsmittel eine Strahlpropagation in eine der Richtungen verhindern (siehe § ...). Die Abbildung 7 zeigt das einfachste Modell eines Ringlasers, versehen mit drei Spiegeln, von denen einer als Auskoppelspiegel dient. Die Pumpe kann ebenfalls hinter einen der anderen Spiegel gestellt werden, dann muß aber gewährleistet werden, das der entsprechende Spiegel für das Pumplicht durchlässig genug ist.

Im folgenden stellen sich folgende Fragen: 1. Wie groß muß die Pumprate R wenigstens sein, damit es zum Laserbetrieb kommt ? 2. Wie groß ist die ausgekoppelte Leistung $P = P_{\text{out}}$ bei stationärem Betrieb ? Diese Fragen werden in 6.3.5 und 6.3.6 nähert erörtert.

Hintergrund dieser Fragen ist lediglich eine Leistungsbilanz, weil ja R signifikant von der eingestrahlt Pumpleistung P_{in} abhängt.

Es ist also wichtig, Gleichung zu finden, die den stationären Betrieb eines Lasers erfassen.

5.3.2. Allgemeine stationäre Lösung

Ratengleichungen, die bei konstanter Zeit betrachtet werden heißen stationär. Alle Zeitableitungen sind hier Null. Es ist nun von Interesse, die Verstärkung im stationären Fall zu erfassen. Zunächst definieren wir die Inversion,

$$\Delta \tilde{N} = \frac{N_2 - N_1}{N}. \quad (151)$$

Aus (147) läßt, mit $d_t N_j = 0$,

$$N_0 = \frac{\Gamma_1}{R} N_1 \quad (152)$$

ablesen, und für die Gesamtbesetzungsdichte gilt, ($N_3 \approx 0$)

$$N = N_0 + N_1 + N_2 \Leftrightarrow N_2 = N - N_1 - N_0 = N - \left(1 + \frac{\Gamma_1}{R}\right) N_1, \quad (153)$$

was in Gleichung (148) eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} & -\Gamma_1 N_1 - \sigma F N_1 + AN - A \left(1 + \frac{\Gamma_1}{R}\right) N_1 + \\ & + \sigma F N - \sigma F \left(1 + \frac{\Gamma_1}{R}\right) N_1 \end{aligned} \quad (154)$$

$$\Leftrightarrow AN + \sigma F N = \left[(\Gamma_1 + \sigma F) + (A + \sigma F) \left(1 + \frac{\Gamma_1}{R}\right) \right] N_1$$

Setzt man dieses Zwischenergebnis in (153) ein, so findet sich,

$$N_2 - N_1 = N - \left(2 + \frac{\Gamma_1}{R}\right) N_1 = N - \frac{N \left(2 + \frac{\Gamma_1}{R}\right)}{\left[(\Gamma_1 + \sigma F) + (A + \sigma F) \left(1 + \frac{\Gamma_1}{R}\right) \right]} \quad (155)$$

Für die Inversion $\Delta \tilde{N}$ in (151) folgt dann, indem man (155) erst auf einen Nenner bringt, und dann konkret ausrechnet,

$$\frac{N_2 - N_1}{N} = \frac{R(\Gamma_1 - A)}{\Gamma_1 A + (\Gamma_1 + A)R + \sigma(2R + \Gamma_1)F} \quad (156)$$

Diese Formel gilt bei beliebig kleiner Pumprate, d.h. falls $\Gamma_1 > A$ ist. Für einen weiteren Fall sieht man auch bereits das Ergebnis. Ist Γ_1 groß gegen die Pumprate, $\Gamma_1 > A$, R was einer schnellen Entleerung des unteren Niveaus entspricht, so vereinfacht sich (156) zu,

$$\frac{N_2 - N_1}{N} \simeq \frac{R}{R + A}, \quad (157)$$

eine starke Inversion erreicht man in diesem Fall, wenn man, $R \simeq A$ wählt !

Die Verstärkung g wurde in (146) definiert. Mit (156) läßt sie sich allerdings noch expliziter angeben, durch eine Bruchumformung folgt,

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{\sigma F (2R + \Gamma_1)}{AR + (R + A)\Gamma_1}}, \quad (158)$$

mit der somit eingeführten Kleinsignalverstärkung g_0 ,

$$g_0 = \frac{\sigma R (\Gamma_1 - A) N}{\Gamma_1 (A + R) + AR} \quad (159)$$

Gleichung (158) kann auch mit dem Sättigungsfluß F_s ,

$$F_s(\sigma) = \frac{AR + (R + A)\Gamma_1}{\sigma(2R + \Gamma_1)}, \quad (160)$$

formuliert werden, und lautet dann,

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{F}{F_s}} \quad (161)$$

5.3.3. Einfache Erklärung des Sättigungsflusses

Man nennt ein elektrisches Feld stark, wenn es in der Lage ist, trotz fortwährender Entleerung die Besetzung im Level 2 aufrechtzuerhalten. D.h. im 2ten Level befinden sich $N/2$. Der damit verbundene Fluß ins System heißt Sättigungsfluß F_s . In (130) wurde hierzu bereits ein Kriterium hergeleitet. So liegt eine Sättigung vor, wenn gilt, (der Faktor 2 spielt eine untergeordnete Rolle),

$$2\sigma F \gg A \Leftrightarrow F \gg \frac{A}{2\sigma} \quad 151 \quad (162)$$

Wir nehmen nun an, das $\Gamma_1 \gg A, R$ gilt, m.a.W. das untere Laserniveau entleert sich so schnell, das es praktisch immer leer ist. Die nun folgende zentrale Abschätzung ist wichtig, da sie in dieser Form oft auch für Mehrniveausysteme funktioniert:

$$\Leftrightarrow N_1 \approx N_3 \approx 0 \quad (163)$$

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 \approx N_0 + N_2 \quad (164)$$

Betrachtet man Ratengleichung (149), so findet man mit diesen Näherungen für den stationären Grenzfall,

$$\begin{aligned} d_t N_2 = 0 &= RN_0 - AN_2 - \sigma F(N_2 - 0) \\ 0 &= RN - RN_2 - AN_2 - \sigma FN_2 \\ \frac{N_2}{N} &= \frac{R}{R + A + \sigma F} = \frac{R}{R + A} \frac{1}{1 + \frac{\sigma F}{R + A}} \end{aligned} \quad (165)$$

Die spezielle Form von (165) wurde deshalb so geschrieben, weil der Sättigungsfluß daraus schnell ersichtlich wird. Man definiert F_s ,

$$F_s \equiv \frac{R + A}{\sigma}, \quad (166)$$

dann läßt sich (165) schreiben als,

$$\frac{N_2}{N} = \frac{R}{R + A + \sigma F} = \frac{R}{R + A} \frac{1}{1 + \frac{F}{F_s}}. \quad (167)$$

Ist das Verhältnis $\frac{F}{F_s} = 1$, so ist $N_2 \approx \frac{1}{2} N$.

5.3.4. Bewegungsgleichung der Inversion

Aus den dynamischen Gleichungen (148)(149) läßt sich auch einiges ersehen. Zieht man (148) von (149) ab, so erhält man die Bewegungsgleichung der Inversion,

$$d_t (N_2 - N_1) = RN_0 + \Gamma_1 N_1 - 2AN_2 - 2\sigma F (N_2 - N_1) \quad (168)$$

Wendet man die obigen Näherungen (152)(153) an, so kann N_1 gegenüber N_2 vernachlässigt werden, aber der Term $\Gamma_1 N_1 = RN_0$ muß beibehalten werden,

$$\begin{aligned} d_t (N_2 - N_1) &\simeq d_t N_2 = 2RN_0 - 2(A + \sigma F) N_2 \\ &= 2RN - 2(A + R + \sigma F) N_2 \end{aligned} \quad (169)$$

Wegen der im 2ten Level noch enthaltenen Population ist die Anregung durch die Pumprate um $2RN_2$ reduziert. Aus (158) folgt, das wenn der Fluß F den Sättigungsfluß überwiegt, die stimulierte Emission als dominanter Prozeß das ober Laserniveau entleert. Dazu muß gelten,

$$F \gg F_s = \frac{A + R}{\sigma}$$

5.3.5. Bestimmung der Laserschwelle

In 1.5.1. brachte eine Betrachtung der Dämpfung, angegeben entweder durch γ oder β , mit dem Zusammenhang $\delta\omega = \gamma = 2\beta$. Per Definition (146) gilt für die Verstärkung $g = \sigma(N_2 - N_1)$, und nach (124)(125) gilt, wobei $\beta = \frac{\delta\omega}{2}$ bereits ersetzt wurde,

$$\sigma(\Delta) = \sigma(0) \frac{1}{\left(\frac{2\Delta}{\delta\omega}\right)^2 + 1}$$

was die Verstärkung g in (158) modifiziert, man setzt dabei σ in die Kleinsignalverstärkung, und in den Sättigungsfluß ein und bekommt,

$$g(\Delta, z) = \frac{g_0}{1 + \left(\frac{2\Delta}{\delta\omega}\right)^2 + \frac{F(z)}{F_s(0)}} \quad (170)$$

Diese Gleichung stellt eine Verallgemeinerung der Leistungsverbreiterung dar, die bereits oben beschrieben wurde, dort war $R=0$. Man sieht auch das g maximal wird, wenn $\Delta=0$ ist, also wenn die Strahlung auf Resonanz ist.

Zur Bestimmung der Schwelle kann man F in g gegenüber den anderen Größen im Nenner vernachlässigen. D.h. wir betrachten,

$$d_z F(z) = g(\Delta, F=0) F(z), \quad (171)$$

deren Lösung

$$F(l) = F(0) e^{g_l} \quad (172)$$

ist. Berücksichtigt man noch Absorptions- und Streuverluste, so müssen (171) und (172) abgeändert werden. Solche Streuverluste werden bei Gasen z.B. durch Rayleigh-Streuung verursacht. Die Lösung lautet dann,

$$F(z) = F(0) e^{(g-a)l} \quad (173)$$

Wir betrachten wieder den Ringlaser aus 6.3.1. Verfolgt man eine Welle entlang eines Umlaufs, so treten an den Spiegeln Reflektionsverluste auf. Ordnet man den Spiegeln die Reflektionskoeffizienten R_1, R_2, R_3 zu, so können wir die Schwelle direkt bestimmen. Dieser Treshold bedeutet ja, das das aktive Medium genau alle Verluste kompensiert. Dann muß gelten :

$$R_1 R_2 R_3 F(l) = F(0) \Rightarrow R_1 R_2 R_3 e^{(g_{th}-a)l} = 1$$
$$g_{th} - a = \frac{1}{l} \ln \left(\frac{1}{(R_1 R_2 R_3)} \right)$$

also gilt für g_{th} ,

$$g_{th} = a - \frac{1}{l} \ln (R_1 R_2 R_3), \quad (174)$$

Was aber auch bedeutet, das die Größe g_{th} lediglich von den Resonatoreigenschaften abhängt. Will man nun die Schwellenpumprate ermitteln, so bildet man aus Gleichung (159),

$$g_{th} = g_0(\Delta, R = R_{th}) = \frac{\sigma R_{th} (\Gamma_1 - A) N}{\Gamma_1 (A + R) + AR}. \quad (175)$$

Die führt durch Umformungen auf,

$$R_{th} = \frac{g_{th} \Gamma_1 A}{\sigma(\Delta) N (\Gamma_1 - A) - g_{th} (\Gamma_1 + A)}, \quad (176)$$

was sich im Falle $\Gamma_1 \gg A$ und kleinem g_{th} zu

$$R_{th} = \frac{g_{th} A}{\sigma(\Delta) N} \quad (177)$$

vereinfacht. R_{th} ist die minimale Pumprate, die zum Laserbetrieb führt. Damit sieht man auch ein, das ein Laser mit geringer Schwelle ein langes aktives Medium, geringe Resonatorverluste, eine geringe spontane Emission, hohe Konzentration von aktiven Zentren, und einen hohen Wirkungsquerschnitt auf Resonanz besitzen sollte.

5.3.6. Betrieb oberhalb der Schwelle

Sind die Auskoppelverluste gering, so ist $F(l)$ nur wenig größer als $F(0)$. Dann kann man in (161) den Fluß $F(z)$ als konstant annehmen. Für eine Berechnung wählt man einen mittleren Fluß \bar{F} ,

$$g(\bar{F}) = \frac{g_0}{1 + \frac{\bar{F}}{F_s}} \quad (178)$$

was wie in 6.3.5 zu einer Stationaritätsbedingung führt,

$$g(\bar{F}) = a - \frac{1}{l} \ln(R_1 R_2 R_3). \quad (179)$$

Man sagt daher, oberhalb der Schwelle ist der Gewinn gleich dem Schwellenwert, $g(\bar{F}) = g_{th}$, auch "gain clamping" genannt. Dieser Zusammenhang liefert durch Einsetzen in (178),

$$\bar{F} = F_s \left(\frac{g_0}{g_{th}} - 1 \right) \quad (180)$$

Der ausgekoppelte Fluß (hinter dem Spiegel) erleidet Transmissionsverluste T , die emittierte Intensität bestimmt man aus Beziehung (119),

$$F_{out} = TF(l) \approx T\bar{F} = T F_s \left(\frac{g_0}{g_{th}} - 1 \right) \quad (181)$$

$$I_{out} = h\nu_{12} T F_s \left(\frac{g_0}{g_{th}} - 1 \right) \quad (182)$$

Für die Größen g_{th} und F_s wurden bereits die Ausdrücke (175) und (166) gefunden, wobei davon ausgegangen werden kann, dass Γ_1 die dominierende Rate ist. Dann gelten folgende vereinfachte Beziehungen:

$$g_0 = \frac{\sigma RN}{A + R} \quad F_s = \frac{A + R}{\sigma} \quad g_{th} = \frac{\sigma R_{th} N}{A + R} \quad (183)$$

Dies eingesetzt in (182) ergibt,

$$I_{out} = h\nu_{12} T \frac{A}{\sigma} \left(\frac{R}{R_{th}} - 1 \right) \quad (184)$$

Bemerkungen:

(1) Bei gegebener relativer Pumpstärke R/R_{th} ist die emittierte Intensität umso größer, je kleiner der stim. Emissionsquerschnitt ist.

(2) Weit oberhalb der Schwelle, $R \gg R_{th}$ ist

$$I_{out} = h\nu_{12} T \frac{NR}{g_{th}} \quad (185)$$

unabhängig von den Details des atomaren Systems, weil in diesem Grenzfall jedes angeregte Atom sein Photon in die Lasermode abgibt.

Aus diesen Formeln kommt man auch auf die Leistungsverhältnisse. So ist die vom Medium aufgenommene Pumpleistung,

$$P_{\text{abs}} = h\nu_p N R V_p, \quad (186)$$

hier ist ν_p die Frequenz des Pumplichts, R die Pumprate, V_p das effektive Pumpvolumen. Bei dem effektiven Pumpvolumen ist zu beachten, das offensichtlich mehr vom aktiven Medium gepumpt wird, als später durch das Modenvolumen abgeräumt wird. Für das Modenvolumen gilt,

$$V_m = l \cdot A_m, \quad (187)$$

und mit effektiver Pumpfläche,

$$V_p = l \cdot A_p \quad A_p > A_m. \quad (188)$$

Vergleicht man (109) mit (119), so findet man den bekannten Zusammenhang von Intensität und Leistung,

$$P_{\text{out}} = I_{\text{out}} A_m, \quad (189)$$

am Treshold gilt nach (186),

$$P_{\text{abs,th}} = h\nu_p N R_{\text{th}} V_p. \quad (190)$$

Betrachtet man (186) und (190), so folgt direkt,

$$\frac{P_{\text{abs}}}{P_{\text{abs,th}}} = \frac{R_{\text{abs}}}{R_{\text{abs,th}}} \quad (191)$$

und (189) liefert damit,

$$P_{\text{out}} = h\nu_{12} A_m T \frac{A}{\sigma} \left(\frac{P_{\text{abs}}}{P_{\text{abs,th}}} - 1 \right). \quad (192)$$

Dies ist eine zentrale Anwenderformel um die Ausgangsleistung zu finden.

Alle Umformungen haben nur das Ziel, die jeweiligen Größen auf eine anwendbare Form zu bringen. So kann es möglich sein, das man z.B. die Pumpraten nicht genau kennt, dafür aber die Pumpleistung.

Weit oberhalb der Schwelle läßt sich (192) noch in eine praxisbezogenere Form bringen. Durch Taylorentwicklung und Näherung von $\ln(1+x) \approx x$, die bei sehr kleinen x gültig ist, und bei den hier vorliegenden Transmissionen auch funktioniert, findet man:

$$\begin{aligned}
g_{\text{th}} &= a + \frac{1}{l} \ln(R_1 R_2 R_3)^{-1} \\
&\approx \frac{T}{l} + \frac{1}{l} \ln((1 - T_1)(1 - T_2)(1 - T_2))^{-1} \\
&\approx \frac{T}{l} + \frac{1}{l} \ln((1 + T_1)(1 + T_2)(1 + T_2)) \\
&\approx \frac{T}{l} + \frac{T_1 + T_2 + T_3}{l}.
\end{aligned}$$

Die Transmission T ist die dem Absorptionskoeffizienten a zugeordnete Transmission. Setzt man (190) in (192) ein, so findet sich die Näherung,

$$\begin{aligned}
P_{\text{out}} &\approx h\nu_{12} A_m T N \frac{P_{\text{abs}}}{h\nu_p N I A_p (T_1 + T_2 + T_3 + T)/l} \\
\Rightarrow P_{\text{out}} &\approx \frac{\nu_{12} A_m}{\nu_p A_p} \frac{T}{T + T_{\text{Rest}}} P_{\text{abs}} \quad (193)
\end{aligned}$$

Die Konversionseffizienz $P_{\text{out}}/P_{\text{abs}}$ wird auch als "slope efficiency" bezeichnet. Somit wären alle den Laserbetrieb kennzeichnenden Beziehungen aufgestellt.

§6 Optische Resonatoren

Optische Resonatoren finden nicht nur als Baugruppe von Lasern Verwendung. Vielmehr sind sie auch als spektroskopisches Hilfsmittel bekannt. Daher ist der nun folgende Paragraph allgemein gehalten.

6.1. Aufgabe [3]

Der Resonator hat im Laser die Aufgabe, ein stabiles, starkes Strahlungsfeld aufzubauen. Ein solches Feld ist in der Lage die durch das gepumpte Medium zur Verfügung gestellte Inversion besser abzuräumen. Verwirklicht wird ein Resonator durch zwei oder mehr Spiegel, zwischen denen das Lichtfeld oszillieren kann. Ein bekanntes Beispiel ist der Fabry-Perot-Resonator, der einen Hohlraumresonator mit nur zwei Wänden darstellt.

Beim Design optischer Resonatoren muß darauf geachtet werden, die Beugungsverluste möglichst gering zu halten. Eine weitere Aufgabe ist die Formung des Strahls.

6.2. Paraxiale Wellengleichung

6.2.1. Herleitung der paraxialen Wellengleichung

Ausgangspunkt bildet die Wellengleichung für das elektrische Feld,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} = 0, \quad (194)$$

mit dem \mathbf{E} Vektor,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} = A \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{i\omega t - ikz} \quad (195)$$

Das in Abschnitt 2.2. ausgeführte Verfahren der Fouriertransformation vereinfacht solche Differentialgleichungen, wie die Wellengleichung. Der Übergang in den reziproken Raum wandelt die PDE (partial differential equation) in eine ODE (ordinary differential equation) um, in unserem Fall erhalten wir die Dynamik der Feldamplitude durch eine Wellengleichung die man auch Helmholtz-Gleichung nennt,

$$(\nabla^2 + k^2) \mathcal{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (196)$$

Mit der geläufigen Definition des Wellenvektors \mathbf{k} der in Ausbreitungsrichtung zeigt, und für den gilt,

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{bzw.} \quad k = \frac{\omega}{c/n}, \quad (197)$$

je nachdem ob ein Medium der Brechzahl n vorliegt oder nicht. Spalten wir nun noch den Phasenfaktor ganz ab, denn mit (195) gilt $\mathcal{E} = Au(\mathbf{r}) e^{-ikz}$ so erhalten wir aus (196) eine Dgl für $u(\mathbf{r})$,

$$\begin{aligned} Ae^{i\omega t - ikz} \nabla \nabla u + A(\nabla u) \nabla e^{i\omega t - ikz} + A(\nabla u) \nabla e^{i\omega t - ikz} + Au \nabla \nabla e^{i\omega t - ikz} + \\ k^2 Au e^{i\omega t - ikz} = 0, \\ \Rightarrow \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u - 2ik \partial_z u = 0 \end{aligned} \quad (198)$$

Als nächstes wenden wir wieder die SVEA an, die Näherung der langsam veränderlichen Amplitude, die bereits bei der Herleitung der Maxwell-Bloch-Gleichungen hilfreich war. Die SVEA wird oft auch als paraxiale Näherung genannt, und ist unter diesem Begriff in die Optik-Literatur eingegangen,

$$|\partial_z^2 u| \ll 2k |\partial_z u|, \partial_x^2 u, \partial_y^2 u,$$

weil diese Formulierung äquivalent zu der Annahme ist, daß der Strahl aus ebenen Wellen besteht, die zu Großteil unter Winkeln $\ll 30^\circ$ zur z -Achse propagieren. Dies führt zu der paraxialen Wellengleichung:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u - 2ik \partial_z u = 0. \quad (199)$$

6.2.2. Parameter des Gaußschen Strahls (Schiller)

Die gesuchten Schwingungszustände sind Lösungen dieser Gleichung. Um nun solche Lösungen zu finden, startet man bei bekannten Lösungen der Helmholtz Gleichung (196), so z.B. ebene Wellen,

$$\mathcal{E}_{\text{Ebene}} = A e^{-ikr}, \quad (200)$$

oder Kugelwellen,

$$\mathcal{E} = A \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (201)$$

Letztere sind ein realistischer Ausgangspunkt, weil sie im Gegensatz zu ebenen Wellen eine endliche Energie besitzen. Da (201) die Helmholtz-Gleichung (196) exakt erfüllt, wird sich nicht die paraxiale Näherung (199) erfüllen.

Will man eine Lösung von (199) finden, so muß die Kugelwelle ebenfalls in paraxialer Näherung betrachtet werden. Es gilt,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und für kleine Winkel θ gilt,

$$x^2 + y^2 \ll z^2.$$

Damit läßt sich r in eine Taylorreihe in z entwickeln,

$$r \approx z \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right),$$

was (201) auf eine Form bringt, die jetzt die paraxiale Wellengleichung erfüllt,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}) &= A e^{-ikz} \frac{\exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]}{z} \\ u(\mathbf{r}) &= \frac{\exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]}{z} \end{aligned} \quad (202)$$

Dies legt nahe, einen komplexen Ansatz zu versuchen. Man berücksichtigt gleichzeitig eine Art Strahlursprung, indem man die Differenz $z - z'$ betrachtet,

$$u(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{z - z'} e^{-ik\left[\frac{x^2+y^2}{2(z-z')}\right]}, \quad (203)$$

und auch dies ist Lösung der par. Wellengleichung, für beliebig $z' \in \mathbb{C}$. Ein reelles z' verschiebt dabei die Quelle, d.h. man legt einen Ursprung fest. Der Einfluß eines komplexen z' findet sich, wenn man Real und Imaginärteil separiert,

$$\begin{aligned} z' &= z_0 - i q_0, \\ \operatorname{Re}(z') &= z_0 \quad ; \quad \operatorname{Im}(z') = -q_0 \end{aligned}$$

Dann folgt,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z'} &= \\ \frac{z - z_0}{(z - z_0)^2 + q_0^2} - i \frac{q_0}{(z - z_0)^2 + q_0^2} &= \frac{1}{(z - z_0)^2 + q_0^2} e^{i\psi(z)} \end{aligned} \quad (204)$$

d.h. der Term $\frac{1}{z - z'}$ verursacht bei einem komplexen z' eine zusätzliche Phasenverschiebung, die man Guoy Phase nennt. In der Gaußschen Zahlenebene gilt für eine beliebige komplexe Zahl $z = x + iy = r e^{i\phi}$, $\tan \phi = \frac{y}{x}$, also hier,

$$\tan \psi = \frac{-q_0}{z - z_0} \Leftrightarrow \psi = \arctan \frac{z - z_0}{q_0} \quad (205)$$

Setzt man (204) in (203) ein, folgt

$$u(r) \sim \frac{1}{(z - z_0)^2 + q_0^2} e^{i\psi(z)} \cdot \exp \left\{ -ik \frac{(x^2 + y^2)(z - z_0)}{2(z - z_0)^2 + q_0^2} - k \frac{(x^2 + y^2) q_0}{2(z - z_0)^2 + q_0^2} \right\} \quad (206)$$

$$u(r) \sim \frac{e^{i\psi(z)}}{(z - z_0)^2 + q_0^2} \cdot \exp \left\{ -ik \frac{k(x^2 + y^2)}{2(z - z_0) + q_0^2/(z - z_0)} - \frac{(x^2 + y^2)}{\frac{2}{k} \left(q_0 + \frac{(z - z_0)^2}{q_0} \right)} \right\} \quad (207)$$

(207) besteht aus einer imaginären und einer reellen Phase. Der hintere Term beschreibt die Intensitätsverteilung in der x,y- Ebene. Sie besitzt eine typische Gaußform, und legt auch die Strahlbreite fest (am hinteren Term im Nenner abzulesen),

$$w^2(z) = w_0^2 + \frac{4(z - z_0)^2}{k^2 w_0^2}, \quad (208)$$

$$q_0 = \frac{k w_0^2}{2}$$

Der Parameter w_0 heißt Strahltaile und beschreibt die Breite am schmalsten Punkt. Definiert man die Rayleigh-Länge, die Länge auf der z-Achse, wo der Strahl noch relativ schmal ist, als,

$$z_R \equiv \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{k w_0^2}{2} = q_0$$

erhält man die typische Formel der Strahlbreite:

$$w^2(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2} \quad (209)$$

Der vordere Term in (207) enthält in Analogie zur Kugelwelle den Krümmungsradius des Strahls, und man liest ab,

$$R(z) = z - z_0 + \frac{z_R^2}{z - z_0}, \quad (210)$$

der im Strahltaillenpunkt $z = z_0$ über (210) nicht wohldefiniert ist, man sieht aber das für $z \rightarrow z_0$ gilt, $R \rightarrow \infty$. Im Strahltaillenpunkt ist der Krümmungsradius unendlich.

Die Strahldivergenz beschreibt die Breite des Strahls, in Abhängigkeit vom Abstand von z_0 , also

$$\theta_{\text{div}} = \frac{w(z)}{z - z_0} \xrightarrow{\text{für große } z} \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \frac{2}{k w_0} \quad (211)$$

Wie man sieht ist die Divergenz gering, wenn die Taille um vieles größer als die Wellenlänge λ ist, genauer, desto größer die Taille, umso geringer die Divergenz.

Was jetzt noch fehlt ist die oben gefundene Guoy-Phase:

$$\psi(z) = \arctan\left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)$$

6.2.3. Grafische Darstellungen

$$z_0 = 0; w_0 = .02; z_R = 0.05;$$

$$w[z_] = w_0 \sqrt{1 + \frac{(z - z_0)^2}{z_R^2}};$$

Plot[{w[z], -w[z]}, {z, -.5, .5}, PlotRange -> All];

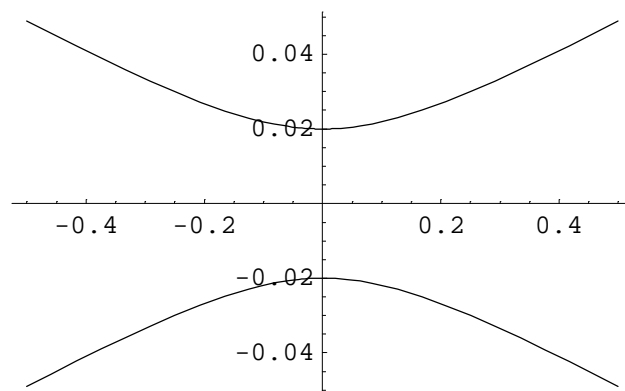


Abb.6.1. Strahltaille, Gaußscher Strahlverlauf

$$R[z_] = z - z_0 + \frac{z_R^2}{z - z_0}; \text{Plot}[R[z], \{z, -.7, .7\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-0.5, .5\}];$$

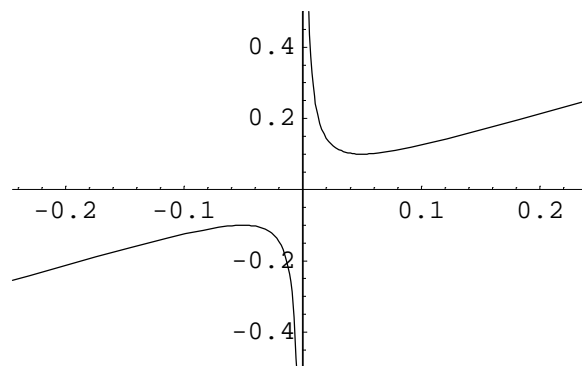


Abb.6.2. R(z) Verlauf des Krümmungsradius der Wellenfront

6.2.4. Lösung der paraxialen Wellengleichung

Über die Proportionalitäten einer Lösung $u(r)$ der paraxialen Wellengleichung wurde bereits in 7.2.2. einiges ausgesagt. Die Betrachtungen wurden aus der Näherung einer bereits bekannten Lösung der vollständigen Wellengleichung hergeleitet und plausibel gemacht. Startet man wieder bei (199),

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u - 2ik \partial_z u = 0,$$

so fordert eine Lösung der Form (207) die Normierung von u über einen Normierungsfaktor u_0 , festgelegt durch,

$$\begin{aligned} & \iint |u(\mathbf{r})|^2 dx dy = 1 \\ & = u_0^2 \iint [(z - z_0)^2 + z_R^2]^{-2} \exp\left[-2 \frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right] dx dy \\ & = u_0^2 \frac{\pi}{2/w^2(z)} \frac{1}{[(z - z_0)^2 + z_R^2]^2} \stackrel{!}{=} 1 \\ & \Leftrightarrow u_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} [(z - z_0)^2 + z_R^2] \end{aligned}$$

Die vollständige Lösung für $u(\mathbf{r})$ lautet dann, unter Berücksichtigung von (204) (207),

$$u(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\psi}}{w(z)} e^{\frac{-ik(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}. \quad (212)$$

Der hintere Term zeigt, das es sich um eine Gaußglocke handelt, und auch der Krümmungsradius scheint gaußförmig verteilt. Das elektrische Feld läßt sich dann direkt angeben,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = A u(\mathbf{r}) e^{-ik(z-z_0)} e^{i\omega t}. \quad (213)$$

Bemerkungen

- (1) Die Strahlaufweitung findet aufgrund von Beugung statt ! Man kann dies mit der Beugung an einer kreisförmigen Blende vergleichen.
- (2) In Achsennähe $x^2 + y^2 \ll w^2(z)$ hat man für $z \gg z_R$ eine Kugelwelle
- (3) Für die Intensität gilt $I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E^2$; mit dem E aus (213)

6.3. Transversale Moden [1] [S1]

Bisher wurde die Wellengleichung aufgestellt, genähert, und dann eine Lösung gesucht, die das elektrische Feld des Lichts in einem Resonator beschreibt. Ausgehend von einer Lösung wie (212) betrachten wir jetzt weitere Lösungen, die in der x-y-Ebene eine andere Art von Feldverteilung als (212) besitzen. Analog zu (202) kann folgender Ansatz betrachtet werden, (beachte in (195) die Definition von \mathcal{E})

$$\mathcal{E} = A e^{-ikz} u_n(x, z) u_m(y, z) \quad (214)$$

Hierbei sind u_n und u_m prinzipiell Funktionen derselben Form, unterscheiden sich allerdings von den im vorigen Abschnitt betrachteten Funktionen $u(r)$. Durch Einsetzen kann gezeigt werden, das mit

$$u_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^n n! w(z)}} \cdot e^{i(n+\frac{1}{2})\psi} \cdot e^{-ik\frac{x^2}{2R(z)}} \cdot e^{-\frac{x^2}{w(z)^2}} \cdot H_n\left(\frac{x}{w(z)/\sqrt{2}}\right) \quad (215)$$

(214) eine Lösung von (199) ist. H_n steht hier für Hermit-Polynome, eine Gruppe von Polynomfunktionen, bei denen Die ersten Hermit-Polynome sind hierbei,

$$\begin{aligned} H_1(\xi) &= 2\xi \\ H_2(\xi) &= -2 + 4\xi^2 \\ H_3(\xi) &= -12\xi + 8\xi^3 \\ H_4(\xi) &= 12 - 48\xi^2 + 16\xi^4 \\ H_5(\xi) &= 120\xi - 160\xi^3 + 32\xi^5 \end{aligned} \quad (216)$$

Wie man sieht hängt besitzen Hermit Polynome n -Nullstellen. Mit Hilfe dieser Funktionen und einer entsprechenden Normierung und Skalierung, lassen sich auch (das ist eigentlich der Hauptzweck) die Lösungen des harmonischen Oszillator plotten, (nicht maßstäblich !),

Plot[{{(HermiteH[6, x] Exp[-x^2/2])^2, 1000 x^2}, {x, -6, 6}}];

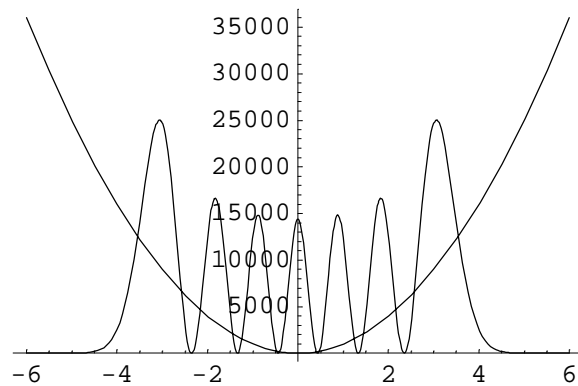


Abb.6.3. Modenlösung in Analogie zum harm. Oszillator

Anmerkungen:

- (1) Transversale Feldverteilung in relativen Einheiten ($x/w(z)$) bleibt gleich.
- (2) H_n hat n Nullstellen, d.h. das Feld schwingt mit 180° Phasenverschiebung in benachbarten Bäuchen.
- (3) Abstand zwischen äußersten Peaks $\approx 2 w(z) \sqrt{n}$ (?), d.h. höherer Moden haben größere Divergenz.
- (4) die Guoyphase ist $2n$ mal größer, wegen der stärkeren transversalen Variation des Feldes.
- (5) u_n ist normiert.
- (6) $\{u_n\}$ bildet ein Basissystem, daher kann eine beliebige Welle $\varphi(x,y)$ die auf einer bestimmten Ebene eine konstante Phase besitzt, in $\{u_n(x), u_m(y)\}$ entwickelt werden,

$$\varphi(x, y) = \sum_{n,m} c_{nm} u_n(x) u_m(y) \quad (217)$$

Aus der Normierungsbedingung findet man die Entwicklungskoeffizienten zu,

$$c_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \varphi(x, y) u_n(x) u_m(y) \quad (218)$$

M.a.W.: Eine beliebige Mode kann als Linearkombination von Modenfunktionen dargestellt werden. Die Propagation von φ ist dann gegeben durch,

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n,m} c_{nm} u_n(x, z) u_m(y, z) \quad (219)$$

Alle TEM_{00} Moden mit geeigneter Taille w_0 sind Eigenmoden von Resonatoren mit sphärischen Spiegeln (oder Linsen).

Je nach räumlicher Verteilung der Inversion können beim Laser mehrere transversale Moden hohe Verstärkung besitzen, anschwingen und oszillieren. Man sagt, der Laser ist transversal multimode. Dies ist oft unerwünscht, da der Strahl so nicht mehr gut fokussierbar ist. Dieser transversale Effekt ist unabhängig von dem longitudinalen Modeninhalt, d.h. wie die Verbreiterung ist.

Neben den Hermit-Polynomen existieren noch Lösungen der paraxialen Wellengleichung, die aus Laguerre Polynomen aufgebaut sind.

6.4. Resonanzfrequenzen optischer Resonatoren

Würde man nur ebene Wellen betrachten, so werden die möglichen Moden durch die (longitudinale) Bedingung, das in einen Kasten der Länge L mindestens eine stehende Welle paßt (für $q=0$, oder höhere Ordnung),

$$q \frac{\lambda}{2} \stackrel{!}{=} L, \quad (220)$$

festgelegt, die sich mit $c=\lambda\nu$ zu

$$\nu = q \frac{c}{2L} \quad (221)$$

umformen läßt. q ist der sog. Modenindex. Diese Formel gilt natürlich nur für den Stehwellenresonator. Hauptbedingung ist also die Reproduktion der Welle,

$$E(z) = E(z + 2L)$$

und bedeutet, das sich nicht nur die Amplitude, sondern auch die Phase reproduziert!

Im Fall von Gaußschen Wellen muß auch Guoy-Phase mit berücksichtigt werden. Die Phasenänderung zwischen $z=0$ und $z=L$ (bei einem Resonator der Länge L), ist

$$\begin{aligned} & \left(n + \frac{1}{2} + m + \frac{1}{2} \right) (\psi(L) - \psi(0)) + (-kL + 0) \\ & = -kL + (n + m + 1) \arccos(\pm \sqrt{g_1 g_2}) \stackrel{!}{=} -q\pi \end{aligned} \quad (222)$$

Wobei weiterhin gilt,

$$k = \frac{2\pi}{c} \nu.$$

Dies führt auf eine Gleichung, die umfassend in jedem Fall die Frequenz bestimmt:

$$\nu_{qnm} = \frac{c}{2L} \left\{ q + \frac{1}{\pi} (n + m + 1) \arccos(\pm \sqrt{g_1 g_2}) \right\} \quad (223)$$

Die Spiegelparameter werden weiter unten definiert.

Konsequenzen:

Ein transversal multimodiger Laser wird i.d.R auch multifrequent sein, selbst wenn man prinzipiell eine einzige longitudinale Mode hat.

Bei der frequenzkonversion mit Resonatoren, die nichtlineare Kristalle enthalten wünscht man, daß die frequenzkonvertierte Welle TEM_{00} ist,

und daß der Prozeß möglich effizient ist. Man nimmt deshalb keinen konfokalen Resonator, denn er ermöglicht es nicht, festzustellen ob der zu konvertierende Strahl die optimale Mode besitzt. Stattdessen wird mittels zu berechnender Optik der Strahl in einen Resonator eingekoppelt, der zwar aus sphärischen Spiegeln besteht, aber nicht konfokal ist. Die Höhen der Transmissionssignale sind proportional zu $|c_{nm}|^2$, bzw. zu $\sum_{n+m=\text{const}} |c_{nm}|^2$ beim Stehwellenresonator.

6.5. Resonatoren mit sphärischen Spiegeln [1][S1]

Das Ziel dieses Abschnitts ist zu ermitteln, ob die oben hergeleitete Lösung der paraxialen Wellengleichung überhaupt in einen Resonator paßt.

6.5.1. Phase der Gaußschen Mode auf einer Kugeloberfläche

Aus (212) kann die Phase abgelesen werden,

$$\varphi = -ik \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right) \quad (224)$$

Sei d der Abstand von Spiegel und Taille; für die Koordinaten auf dem Spiegel gilt, wenn der Spiegel sich an den Koordinaten (x_s, y_s, z_s) befindet (3dPythagoras),

$$x_s^2 + y_s^2 + (z_s + l)^2 = R_s^2 \quad (225)$$

Allgemein gilt für den Krümmungsradius der Wellenfronten (210),

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}. \quad (226)$$

Wir fordern nun, das Wellenkrümmung und Spiegelkrümmung gleich sein sollen, d.h. bei $z=d$ gilt für den Spiegelradius (226) :

$$R_s = d - \frac{z_R^2}{d},$$

was umgeformt nach z_R^2 und in (226) eingesetzt für $R(z)$

$$R(z) = z + \frac{d(R_s - d)}{z} \quad (227)$$

liefert. Es interessiert allerdings weiterhin wie sich dort die Phase verhält, also wird (227) und (225) in (224) eingesetzt,

$$\begin{aligned}
\varphi &= -ik \left(z_s + \frac{1}{2} \frac{R_s^2 - (R_s + z_s - d)^2}{z_s + d \frac{(R_s - d)}{z_s}} \right) \\
&= -ikz_s \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(z_s - d)^2 - 2R_s(z_s - d)}{z_s^2 - d^2 + R_s d} \right) \\
&\approx -ikz_s \left(1 - \frac{(z_s - d)}{d} \right) = \\
&\quad -ikd \left(1 + \frac{z_s - d}{d} \right) \left(1 - \frac{z_s - d}{d} \right) \\
&\approx -ikd = \text{const.}
\end{aligned}$$

Ferner ist die Guoy-Phase $\approx i \frac{z_R}{R_s} z_s - d$ vernachlässigbar.

6.5.2 Reflektion an einem Spiegel

Liegt der Spiegel bei $z=d$, so läßt sich mit dem Huygensintegral zeigen, daß das reflektierte Feld das einfallende reproduziert. Der Fokus liegt am selben Ort, $z=0$.

6.5.3. Zweiter Spiegel

Um eine Eigenmode zu erhalten, muß ein zweiter Spiegel nach der selben Regel aufgestellt werden. Dazu gibt es beliebig viele Möglichkeiten. Es gilt dabei immer,

$$\begin{aligned}
d_1 + d_2 &= L \\
R_1 = d_1 + \frac{z_R^2}{d_1} ; \quad R_2 &= d_2 + \frac{z_R^2}{d_2}
\end{aligned}$$

Außerdem nimmt die Funktion $R_1(d_1)$ ein Minimum der Krümmung an. Es sind auch negative Werte für R_1 und damit für d_1 erlaubt. Die minimale Krümmung wird bei $d_1 = z_R$ erreicht und es gilt die Stabilitätsbedingung,

$$|R_1| > 2z_R$$

6.5.4. Spiegelparameter

Man definiert die Spiegelparameter mit Hilfe der Resonatorlänge L und dem Krümmungsradius R , als

$$g_i = 1 + \frac{L}{R_i}. \quad (228)$$

Mit den Parametern lassen sich die Tailen auf den Spiegeln bestimmen, und nach einer Rechnung gilt auf den Spiegeln,

$$w_1^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \left[\frac{g_2}{g_1(1-g_1g_2)} \right] ; w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \left[\frac{g_1}{g_2(1-g_1g_2)} \right] \quad (229)$$

Ebenso lässt sich die Taille w_0 bestimmen, für sie gilt,

$$w_0^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \left[\frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2 g_1 g_2)} \right] \quad (230)$$

Damit überhaupt Gaußsche Moden vorliegen, unterliegen die Spiegelparameter einer Stabilitätsbedingung, so wird für das Produkt $g_1 g_2$ gefordert,

$$0 < g_1 g_2 < 1 \quad (231)$$

6.5.5. Beispiele

1. Ein Spezialfall eines sphärischen Resonators ist der Plan-Plan-Spiegel, jedoch mit unendlichen Krümmungsradien, d.h.

$$R_1, R_2 \rightarrow \infty ; g_1, g_2 \rightarrow 1.$$

Ein solcher Resonator ist marginal-stabil, schwer fokussierbar.

2. Eine andere Konfiguration nutzt einen stark und einen schwach fokussierbaren Spiegel. Sie ist stabil, d.h.

$$R_1 \ll L \Rightarrow R_2 \approx L$$

3. Symmetrisch sind Resonatoren mit Spiegeln gleicher Krümmung. (230) vereinfacht sich dann zu

$$w_0^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{1+g}{4(1-g)}}$$

§7 Linienprofile

Anhand des klassischen Lorentz-Oszillator-Modells soll erklärt werden, wie allgemein eine "Linie", und deren "Breite" zustande kommt.

7.1. Lorentz-Oszillator-Modell; Teile der Lorentztheorie [6] [5] [S3]

Dieses Modell bildet die einfachste Vorstellung von Atom-Feld-Wechselwirkungen, es ist ein vollständig klassisches Modell, aber elegant um sich die WW zu veranschaulichen.

Elektron und Kern sind untereinander mit einer Feder verbunden. Ein elektrisches Feld regt diese Feder zu Schwingungen an. Lorentz selber ging hier nicht direkt von einer Feder aus, aber jedoch von einer Kraft, die Kern und Elektron verbindet, und dem Hookeschen Gesetz gehorcht. Basis bildet eine Differentialgleichung, die sich aus dem Hookeschen Gesetz, und der treibenden Kraft $F=qE \Leftrightarrow a=q/m E$ zusammensetzt. Ein weiterer Term ist eine hypothetische Dämpfung $\gamma = \frac{b}{2a}$, die erst später durch spontane Emission und Doppler- und Stoßverbreiterung zurückzuführen ist. x ist als Auslenkung längs zur Verbindungsachse Kern-Elektron zu verstehen. Anstatt von γ findet man in der Literatur auch oft den Term $\gamma=2\beta$. Diesen Zusammenhang benötigt man später noch einige Male.

7.1.1. Gedämpfte, freie Schwingung

Betrachtet man den Fall, daß kein äußeres Feld anliegt, so erhalten wir,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Eine Lösung kann sofort angegeben werden,

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} [\cos\omega t + (\beta/\omega) \sin\omega t] \approx x_0 e^{-\beta t} \cos\omega t.$$

Da die Amplitude kontinuierlich abnimmt, können wir nicht länger von einer monochromatischen Frequenz sprechen, sondern müssen annehmen, das sich $x(t)$ als Superposition mehrerer monochromatischer Schwingungen $e^{i\omega t}$ und Amplituden $A(\omega)$ ergibt:

$$x(t) \sim \int_0^\infty A(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Umgekehrt kan man mit der Fourierrücktransformation auch die Amplitudenfunktion $A(\omega)$ erhalten,

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt x_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t e^{i\omega t},$$

was sich auch direkt integrieren läßt,

$$A(\omega) = \frac{x_0}{\sqrt{8\pi}} \left\{ \frac{1}{i(\omega_0 - \omega) + \beta} + \frac{1}{i(\omega_0 + \omega) + \beta} \right\}.$$

Die Intensitätsverteilung mit $I \sim A^2$ führt auf ein sog. Lorentzprofil,

$$I(\omega) = \frac{\beta/\pi}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}.$$

7.1.2. Halbwertsbreite;FWHM

Eine interessante Frage ist, wie man aus dem Lorentzprofil nun die Halbwertsbreite (FWHM) bekommt, also die "Breite der Linie. Dazu brauchen wir zunächst das Maximum. Dies liegt natürlich bei $\omega_{\max} = \omega_0$. Als nächstes bilden wir folgende Gleichung,

$$I(\omega) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} I_{\max} = \frac{1}{2} I(\omega_0).$$

Durch einige Umformungen erhält man das wichtige Ergebnis:

$$\begin{aligned} (\omega_0 - \omega)^2 &= \beta^2 \\ \delta\omega' &= \beta \quad (\text{HWHM}). \end{aligned}$$

$$\delta\omega = 2\beta \quad ; \quad \delta\nu = \frac{\beta}{\pi} \quad (\text{FWHM})$$

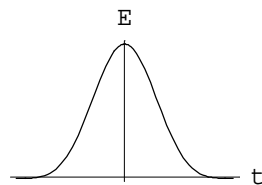
In der Praxis stellt die Dämpfung β oft eine Rate (!) dar, $\beta = \tau^{-1}$.

7.2. Aufstellung der Lineshape-Funktionen

Im folgenden sei β gemäß 7.1.2. definiert als halbe Halbwertsbreite.

7.2.1. Gaußprofil

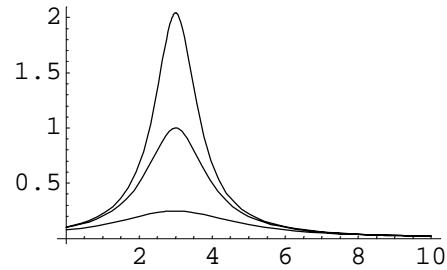
Das Gaußprofil besitzt die bekannte Glockenform, und läßt sich mit einer Linienprofilfunktion gemäß,



$$P_{\text{Gauß}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \beta} \exp \left\{ - \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\beta} \right)^2 \right\}. \quad (232)$$

7.2.2. Lorentzprofil

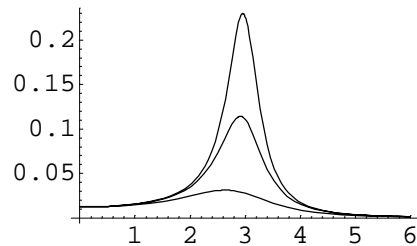
Das Lorentzprofil wurde bereits in 7.1.1. genutzt, es hat allgemein die Form,



$$P_{\text{Lorentz}}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\beta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}. \quad (233)$$

7.2.3. Grossprofil

Die allgemeine Grosslineshapefunktion lautet,



$$P_{\text{Gross}}(\omega) = \frac{4}{\pi} \frac{\omega^2 \beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \omega^2 \beta^2}, \quad (234)$$

und findet sich z.b. als Lösung der DGL's für die erzwungene Schwingung wieder. Ihre Flügel unterscheiden sich von denen der Lorentzform.

7.2.4. Voigtprofil

Dieses letzte Profil stellt eine Faltung der vorigen Profile dar. Gerade wenn durch physikalische Effekte mehrere Profile überlagert werden.

$$P_{\text{Voigt}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{Gauß}}(x) P_{\text{Lorentz}}(x - y) dy \quad (235)$$

Das Voigtprofil wird in der Nähe der Linienmitte, gut durch ein Gaußprofil genähert.

§8 Spektrale Eigenschaften

Mit den Lasergleichungen und der Theorie des optischen Resonators wäre eigentlich der Laser vollständig beschrieben, theoretisch ! In der Praxis tauchen jedoch jede Menge Effekte auf, die die spektralen Eigenschaften des Lasers beeinflussen.

8.1. Konsequenzen

In einem Laser treten eine Menge von zusätzlichen, Wellenlängen-abhängigen Effekten auf, die das Emissionsspektrum mitbestimmen. Die Verstärkung die ein Laser liefert, ist eine Funktion der Frequenz, indirekt in den oberen Formeln ersichtlich durch die Abhängigkeit von Δ . Die Verstärkung ist also verteilt um mehrere mögliche Moden, mit einem Maximum bei der Resonanzfrequenz ν_0 . Die Bedingung, das die Oszillation überhaupt zustande kommt, war

$$g(\nu_m, F) \geq g_{th}. \quad (236)$$

Ist das Profil schmal, so fällt nur die zur verstärken gewünschte Mode in den Bereich, in der die Pumpe das Licht über die Schwelle hebt. Durch die Sättigung ist nämlich dann für alle anderen Moden $g < g_{th}$, sodaß diese nicht anschwingen können.

Der Laser emittiert dann nur einer Frequenz $\nu_L = \nu_m$. Man muß allerdings beachten, das die Frequenz der Mode auch vom Brechungsindex bestimmt wird, da man zur Betrachtung der Wellenlängen"einpassung" ja die optische Weglänge berücksichtigen muß:

$$\nu_m = m \frac{c}{2L^*} = m \frac{c}{2(L_{Air} + n(\nu_m)l)} \quad (237)$$

Hier sind zwei Dinge wichtig, einmal bezieht sich diese Formel, wie auch die Gleichungen weiter oben {(223),(221)} auf einen Stehwellenresonator. Im Falle des Ringresonators würde das /2 wegfallen. Außerdem ist der Brechungsindex wegen nichtlinearen Effekt auch Abhängig von der Inversion, und es gilt,

$$n(\nu) = n_0(\nu) + \Delta n(\nu - \nu_0, N_2 - N_1). \quad (238)$$

Die Frequenz des Lasers liegt zwischen $m \frac{c/2}{L_0 + n_0 l}$ und ν_0 . Dieser Effekt heißt auch "cavity pulling", und ist meist klein, (MHz), außer bei Molekülen und Atomen in Gasphase, wo die Linienbreite des Übergangs gering ist.

Multimodenzillation tritt auch auf beim räumlichen Lochbrennen im Stehwellenresonator, und bei sehr großer spektraler Verstärkungsbandbreite.

Extrem kurze Stehwellenresonatoren vermeiden den Multimodenbetrieb, weil durch $\Delta\nu = \frac{c}{2l}$ bei kleinem l der Abstand zwischen einzelnen Moden sehr groß wird. Dies ist zwar beim Mikrochip-Laser der Fall, allerdings nicht immer verwirklicht, da oft auch Zusatzelemente in den Strahlengang eingebracht werden möchten. Die einfachste Methode ist der Einbau eines Fabry-Perot-Ethelons, wie es in 8.4 angeführt wird.

8.2. Verbreiterungsmechanismen [1] [3]

Die in §7 aufgestellten Linienprofile finden hier jetzt eine Anwendung, ihnen werden nun die physikalischen Verbreiterungsmechanismen zugeordnet.

Man unterscheidet zwei grundlegend unterschiedliche Typen der Verbreiterung des Verstärkungsprofils, also der Funktion $g(\nu)$, die inhomogene und die homogene Verbreiterung. Man muß dabei immer im Auge behalten, dass g proportional zur Kleinsignalverstärkung g_0 , und diese wiederum proportional zur Verstimmung σ ist, damit nimmt g auch das Linienprofil von σ an (siehe (158), (159)).

Die inhomogene Verbreiterung tritt bei einem Ensemble identischer Teilchen auf, bei denen nicht alle Atome dieselbe Resonanzfrequenz besitzen. Dies ist z.B. der Fall bei der Dopplerverbreiterung. Da eine Geschwindigkeitsverteilung vorliegt, lassen sich die Atome an ihrer Geschwindigkeit unterscheiden, und in Klassen unterschiedlicher Resonanzfrequenz einteilen.

Im Gegensatz dazu ist die homogene Verbreiterung dadurch charakterisiert, dass hier die Atome ununterscheidbar sind, d.h. die Resonanzfrequenz ist für alle Atome gleich.

8.2.1. Natürliche Linienbreite

Betrachtet man ein angeregtes Atom, so kann dieses die Anregungsenergie als spontane Emission abgeben. Im Lorentzmodell entspricht dies einer gedämpften Schwingung, und es greifen die Gesetze aus 7.1.1. Das Resultat ist ein Lorentzprofil.

8.2.2. Dopplerverbreiterung [1] [2] [3]

In Gasen können die Teilchen in verschiedene Geschwindigkeitsklassen eingeteilt werden. Im thermischen Gleichgewicht gehorchen sie einer Maxwellverteilung. Bei der Temperatur T ist die Anzahl der Moleküle $n(v_z) dv_z$ im Level E_i pro Volumeneinheit, mit Geschwindigkeitskomponenten zwischen v_z und $v_z + dv_z$

$$n_i(v_z) dv_z = \frac{N_i}{v_p \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v_z}{v_p}\right)^2} dv_z. \quad (239)$$

Hier ist $N_i = \int n_i dv_z$ die Dichte aller Teilchen im Niveau E_i . v_p ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Verteilung, und ist über,

$$\frac{1}{2} m v_p^2 = kT \Leftrightarrow v_p = \sqrt{2 \frac{kT}{m}}$$

definiert. Man muß nun noch wissen wie sich die Resonanzfrequenz verhält. Die Emissionswellenlänge ω_{Emission} im Ruhesystem ist Dopplerverschoben zu,

$$\omega_{\text{Emission}} = \omega_0 + \mathbf{k}\mathbf{v}, \quad (240)$$

und in unserem Fall wird eine Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung gewählt,

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v_z}{c}\right). \quad (241)$$

Offensichtlich ist die Ableitung nach v dann,

$$\frac{d\omega}{dv_z} = \frac{\omega_0}{c} \Leftrightarrow dv_z = \frac{c}{\omega_0} d\omega \quad (242)$$

Mit den Transformationsgleichungen (237) und (238) geht (235) in den Frequenzraum über, und wird zu einer gaußschen Frequenzverteilung,

$$n_i(\omega) d\omega = \frac{c}{\omega_0} \frac{N_i}{v_p \sqrt{\pi}} \exp\left\{-\left(\frac{c(\omega - \omega_0)}{\omega_0 v_p}\right)^2\right\} d\omega. \quad (243)$$

Die Dopplerverbreiterung besitzt ein Gaußprofil.

Am Maximum findet man die "Intensität" $I(\omega_0)$, für die FWHM gilt dann,

$$\frac{1}{2} I(\omega_0) = I(\omega_0) \exp[\dots] \quad (244)$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{1}{2} = - \left(\frac{c(\omega - \omega_0)}{\omega_0 v_p} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\ln 2} = \left(\frac{c}{\omega_0 v_p} \frac{\delta\omega_{FWHM}}{2} \right) \Leftrightarrow \delta\omega = \frac{\omega_0 v_p}{c} 2 \sqrt{\ln 2}$$

$$\delta\omega = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{8 \frac{kT}{m} \ln 2} \quad (245)$$

8.2.3. Stoßverbreiterung

Die wichtigsten Punkte hierzu wurden in 4.3. Stöße, Streuquerschnitte besprochen. Typischerweise ist die Stoßverbreiterung druckabhängig, denn desto höher der Druck, umso mehr Stöße kommen vor.

Es sei nur gesagt, daß es sich um Lorentz, aber auch um Grossprofile handeln kann.

8.3. Räumliches Lochbrennen [1][3]

Die sog. Lochbrenneffekte beschreiben Phänomene, wobei in den Resonatoren nur bestimmte Bereiche des aktiven Medium abgeräumt werden.

In einem typischen linearen Resonator kommt es zur Bildung von stehenden Wellen, die miteinander interferieren. Für die Energiedichtebilanz gilt, (siehe auch Optik:Hecht)

$$\begin{aligned} \frac{h\nu}{c} F &= \varepsilon_0 E^2 \\ &= \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \omega t \sin^2 kz \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \sin^2 kz \end{aligned} \quad (246)$$

Man sieht, daß der Fluß in seinen räumlichen Komponente proportional zu $\sin^2 kz$ ist. Der Fluß setzt sich aus ein und auslaufenden Fluß zusammen,

$$F \equiv \{F^+ + F^-\} 2 \sin^2 kz.$$

Damit kann die Formel für die Verstärkung modifiziert werden,

$$g(\nu, z) = \frac{g_0(\nu)}{1 + 2 \frac{(F^+ + F^-)}{F_{\text{sat}}} \sin^2 kz}, \quad (247)$$

und es treten Maxima und Minima der Verstärkung auf, und das aktive Medium wird an einigen Stellen besonders stark, und an anderen Stellen schwach abgeräumt. Für $\sin^2 kz=0$ nimmt die Verstärkung ihr

Maximum g_0 an. Bei $\sin^2 kz = 1$ wird g minimal, ein "Loch" wird in die Kurve von g "gebrannt". Bei $kz = \pi$ ist dies der Fall, also sind die "Löcher" in Abständen $\Delta z = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$ zu finden.

Fazit: Beim Stehwellenresonator ersetzt (243) die herkömmliche Formel (161), und die Verstärkung ist entlang dem aktiven Medium nicht mehr konstant, sondern variiert in der Größenordnung der Wellenlänge.

Dies führt zu wichtigen Auswirkungen, denn da räumlich an einigen Stellen die Besetzungsinversion nicht abgeräumt wird, stehen diese für die Verstärkung von anderen Moden zur Verfügung. Es kommt durch das Lochbrennen zu einem (oft nicht erwünschten) Multimodenbetrieb.

Neben dem räumlichen Lochbrennen gibt es auch das spektrale Lochbrennen, auf das hier nicht eingegangen wird, es ist am besten im Buch "Lasers" von Siegman zu finden.

8.4. Fabry-Perot-Ethalon [1] [3]

8.4.1. Vielstrahlinterferenz

Das Ethalon basiert wie das FPI auf Vielstrahlinterferenz an planparallelen Platten. Eine Glasplatte erfüllt diesen Zweck und die Reflektionsschichten sind in diesem Fall die Glasränder. Ein direkt durchlaufender Strahl interferiert konstruktiv mit einem zweifach reflektierten Strahl genau dann, wenn

$$m\lambda = \Delta s = 2nd \cos \phi \quad (248)$$

gilt. d sei die Dicke, n der Brechungsindex, Δs der optische Mehrweg. Summiert man die Partialamplituden auf, so können die Airy Formeln für Transmission und Reflektion bei Vielstrahlinterferenz hergeleitet werden:

$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + \mathcal{F}^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad (249)$$

$$I_T = I_0 \frac{\mathcal{F}^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}{1 + \mathcal{F}^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad (250)$$

Die transmittierenden Eigenschaften lassen sich am besten am Diagramm der Transmission darstellen.

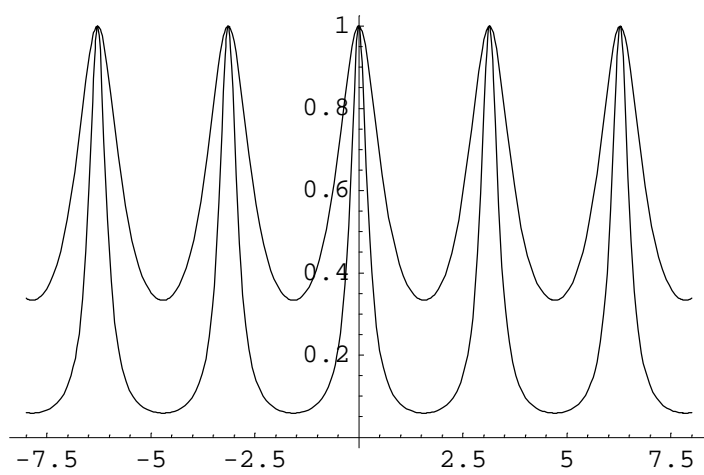


Abb.8.1. Fabry-Perot Resonator

Der Abstand zwischen zwei Maxima heißt freier Spektralbereich, und läßt sich direkt aus der Bedingung (244) ablesen,

$$\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{2nd \cos \phi}. \quad (251)$$

Entscheidend ist auch die Größe \mathcal{F} . In Fig.8 sind Transmissionskurven für zwei verschiedene \mathcal{F} gezeichnet, bei der schärferen war \mathcal{F} größer. Diese Größe wird Finesse genannt, und ist über den in der detaillierten Fassung der Airy-Formeln auftauchenden Reflektionskoeffizienten definiert,

$$\mathcal{F} = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\delta\nu} = \frac{\pi \sqrt{R}}{1 - R}. \quad (252)$$

Bei angegebener Finesse kann somit auch die Breite eines Transmissionsprofils bestimmt werden.

Ein Ethalon im Strahlengang hat direkten Einfluß auf g_{th} , also die Größe die vom Gain überschritten werden muß, damit es zur Laseroszillation kommt.

§9 Gepulste Laser

9.1. Grundlagen [2]

Unter einem Puls laser versteht man einen Laser, der seine Laserleistung in einem kurzen Zeitintervall abgibt. Benötigt werden solche Pulse vor allem in der zeitaufgelösten Spektroskopie, da diese Aufschluß über wichtige dynamische Prozesse der Physik, Chemie und Biologie liefert. Weiterhin ist eine extrem präzise Materialbearbeitung möglich, da man über Pulsratenveränderung sehr genau die eingestrahlte Leistung kontrollieren kann. Dadurch finden Puls laser auch Anwendung im medizinischen Bereich.

9.1.2 Zeitprofile, Pumpulse & Spikes

Jeder Laser besteht aus zwei Hauptbestandteilen, dem optischen *Resonator*, und dem aktiven Medium. Das aktive Medium muss von einer äußeren Quelle erst gepumpt werden, um die für den Laserbetrieb nötige *Besetzungsinversion* bereitzustellen. Jetzt sind zwei Voraussetzungen notwendig, um Laseremission zu erhalten. Zunächst müssen die gewünschten, zur induzierten Emission passenden Moden anschwingen, d.h. es müssen irgendwann genügend Photonen vorhanden sein. Da die Anzahl der entstehenden Photonen abhängt von der Besetzungsdichte der oberen Niveaus, muss auch die *Besetzungsinversion* oberhalb eines Schwellenwerts (*Threshold*) liegen, damit der Oszillator überhaupt anschwingt! Diese *Thresholdlinie* wird genau dann unterschritten, wenn nicht genügend Photonen bereitgestellt werden, d.h. die Verlustrate hoch ist, oder wenn die *Besetzungsinversion* zu gering ist.

Benutzt man nun eine gepulste Pumpquelle, so liegt die Inversion ab einem bestimmten Zeitpunkt an über der Schwelle. Dann erst kommt es zum Laserbetrieb. Die Laserleistung steigt jetzt schneller als die Besetzungsinversion, überwiegt diese, und baut sie bis zum *Threshold* ab. Dies setzt allerdings voraus, dass die Lebensdauer des oberen Niveaus lang ist gegen die des Unteren.

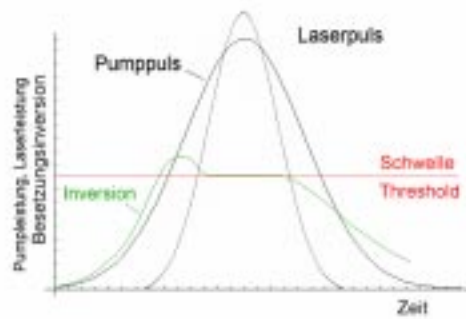


Abb.9.1. Inversionsverlauf

Ist hingegen die Relaxationszeit des oberen Niveaus kurz, so werden die angeregten Zustände schneller abgebaut, was dazu führt, dass die Schwelle unterschritten wird. Somit begrenzt sich der Laser selbst.

Sind die Relaxationszeiten der Laserniveaus zusätzlich lang gegenüber der Anstiegszeit des Pumpulses, so wird eine große Besetzungsinversion aufgebaut, bevor das obere Niveau durch induzierte Emission abgebaut werden kann. Dies führt zu einer nun folgenden, hohen Verstärkung, und somit zu einer hohen Laserleistung, durch welche die Besetzungsinversion sofort unter den Threshold fällt (Abb.2).

Ist hingegen die Relaxationszeit des oberen Niveaus kurz, so werden die angeregten Zustände schneller abgebaut, was dazu führt, dass die Schwelle unterschritten wird. Somit begrenzt sich der Laser selbst.

Sind die Relaxationszeiten der Laserniveaus zusätzlich lang gegenüber der Anstiegszeit des Pumpulses, so wird eine große *Besetzungsinversion* aufgebaut, bevor das obere Niveau durch induzierte Emission abgebaut werden kann. Dies führt zu einer nun folgenden, hohen Verstärkung, und somit zu einer hohen Laserleistung, durch welche die *Besetzungsinversion* sofort unter den *Threshold* fällt (Abb.2).

Geschieht dies alles innerhalb eines Pumpzyklus, so kann eine noch vorhandene Pumpleistung das obere Niveau wieder füllen, und eventuell einen erneuten Laseroutput erzwingen. Somit können innerhalb eines Pumpulses mehrere sogenannte Spikes entstehen, die jedoch in einer irregulären Abfolge und Dauern von etwa $\Delta T = 1 \mu s$ pro Spike auftreten (Abb.3).

Will man nun eine zeitaufgelöste Spektroskopie betreiben, nutzt man gerne Dye-Laser, da ihre Wellenlänge kontinuierlich durchstimmbare ist. Weil hier kurze Relaxationszeiten auftreten, kommt es nicht zur Bildung dieser Spikes, und der Idealfall A kann realisiert werden. [1]

9.2. Q-Switch [2]

9.2.1. Prinzip der Güteschaltung

Betrachtet man den optischen *Resonator*, so finden sich verschiedenste Ursachen für Verluste. Um die induzierte Emission auf bestimmten Moden zu erlangen, muß die Speicherfähigkeit für diese Moden besonders groß sein, bzw. die Verluste dieser Moden sollten klein sein.

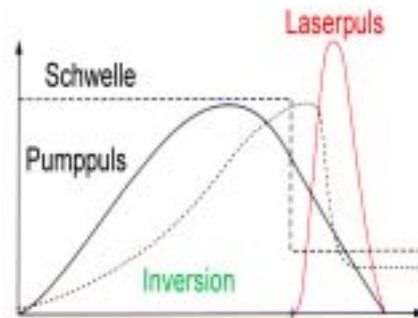


Abb.9.2. Prinzip des Riesenpuls

Um die „Qualität“ eines *Resonators* bezüglich einer Mode k zu erfassen, definiert man die sogenannte *Resonatorgüte* Q als Verhältnis der in der k -ten Mode gespeicherten Energie E zum Energieverlust pro Schwingungsperiode der *Resonator* Eigenfrequenz ω .

$$Q_k = \omega \frac{W_k}{dW_k/dt} = \frac{\omega}{\gamma_k} T_R$$

Um nun einen leistungsstarken Puls durch einen Blitzlampengepumpten Laser zu bekommen, wird bis zu einem Zeitpunkt t_0 die Verlustrate γ durch einen optischen Schalter im *Resonator* künstlich hochgehalten. Dadurch wird die Schwelle trotz ausreichender *Besetzungsinversion* nicht erreicht, da nie genügend Photonen für das Anschwingen der Mode vorhanden sind. Zwar werden durch spontane Emission immer einige Photonen gebildet, aber da nie der *Threshold* erreicht wird, kann das obere Niveau auch nicht entleert werden. So baut sich bei einem Pumpuls eine große *Inversion* auf, die sich dann wenn der optische Schalter geöffnet wird, sehr schnell entleert. Dadurch kommt es zur Entstehung des Riesenpuls (Abb.4).

Hierbei werden Dauern von 1-20 ns, und je nach Lasertyp, Leistungen von 10^5 - 10^9 W erreicht.

9.2.2. Mechanische Schalter

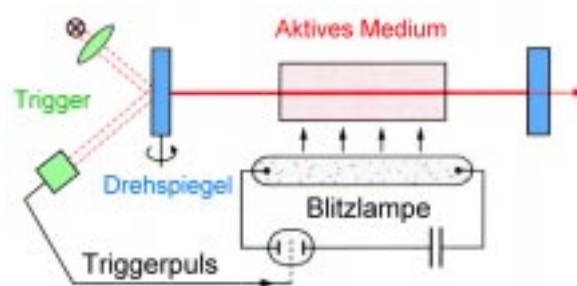


Abb.9.3. Mechanischer Schalter und Triggerpuls

Einfachste Methode einen gütegeschalteten Puls laser zu konstruieren, ist einen mechanischen Schalter zu verwenden, beispielsweise einen rotierenden Spiegel, der das Licht passend auskoppelt (Abb.5). Der Drehspiegel löst hierbei bei einer bestimmten Stellung, kurz bevor der Laser anschwingt, einen Triggerpuls aus, der die Pumpquelle dazu bringt einen Pumpimpuls zu zünden. Anstatt des drehenden Spiegels ist ebenfalls ein Aufbau mit drehendem Prisma möglich. Nachteil dieser Technik ist, dass die Pulsdauer von der Drehfrequenz des Motors unter dem Spiegel abhängt, und nicht kurz genug ist.

9.2.3. Elektrooptische Schalter

Eine weitere Möglichkeit eine Güteschaltung zu realisieren ist der Einsatz eines elektrooptischen Mediums, das als Schalter in den Strahlengang innerhalb des optischen Resonators eingebaut wird. Das hier verwendete Prinzip geht auf zwei elektrooptische Effekte zurück, den Pockels-, und den Kerr- Effekt.

9.2.3.1. Pockels Effekt, linearer elektrooptischer Effekt

Einige anisotrope Kristalle werden durch Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes doppelbrechend (Bsp: Kaliumdihydrogenphosphat). D.h. ihre Brechzahlen sind für unterschiedliche Richtungen verschieden. Dies kommt daher, dass bei Anwesenheit eines (konstanten oder niederfrequenten) elektrischen Feldes, die Dielektrizitätskonstante ϵ eines Mediums von der Feldstärke E abhängt. Legt man also eine Spannung U an die Elektroden einer Pockelszelle, so dreht diese die Polarisations ebene einer einfallenden linear polarisierten Welle um einen Winkel α proportional zur angelegten Spannung U ist:

$$\alpha \sim U$$

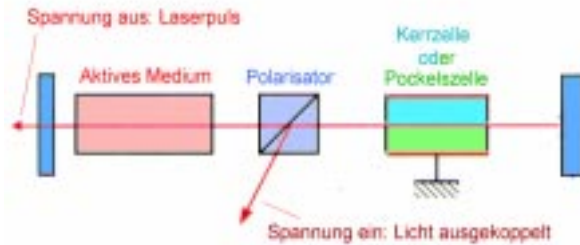


Abb.9.4. Elektrooptischer Schalter mit Polarisator

Man baut nun einen solchen Kristall zusammen mit einem Polarisationsfilter in den *Resonator*. Diese werden so eingestellt, das bei angelegter Spannung die Polarisationsrichtungen von Filter und *Pockelszelle* gegeneinander verdreht sind. Dadurch wird alles Licht im Strahlengang ausgekoppelt, und es kann keine Laseraktivität zustande kommen. Um nun einen Laserpuls zu erzeugen, schaltet man die Spannung ab, wodurch die Polarisationsebene um $\alpha=90^\circ$ gedreht wird. Die Polarisationsrichtungen stimmen nun überein, und für dieses Licht ist der Polarisator durchlässig. Um den Schalter wieder zu schließen schaltet man die Spannung wieder an (Abb.6). Ein analoger Aufbau wäre das Zünden der *Pockelszelle* mittels Spannungspuls (was auch gemacht wird), allerdings geht es schneller eine Spannung wegzunehmen, als sie anzulegen !

Einen genaueren Einblick in die Vorgänge beim Pockelseffekt ermöglicht eine Phasenverfolgung der beiden Strahlen (siehe auch Anhang A.4) e und o . Der Effekt der Doppelbrechung beruht wie oben beschrieben, darauf, das Licht mit einer Polarisation senkrecht zur optischen Achse anders gebrochen wird als parallel polarisiertes:

$$\begin{aligned} n_e(E) &= n_e(0) + r_e E \\ n_o(E) &= n_o(0) + r_o E \end{aligned} \quad (253)$$

Auch hier wird die "Linearität" sichtbar. Um die Polarisationsebene zu drehen, muß eine Phasenverschiebung von π gefordert werden, was der Wirkung einer $\lambda/2$ Platte entspricht. Man könnte die Zelle auch so mit Spannung belegen, daß nur die Phasenverschiebung einer $\lambda/4$ Platte hätte, damit erhielte man zirkular polarisiertes Licht, was dem Sinn des Aufbaus an dieser Stelle nicht zuträglich wäre. Die Phasenbetrachtung zeigt bei einer Zellenlänge L :

$$\begin{aligned} E_{e\text{-Licht}} &\sim e^{ikz} = e^{ik(n_e(E)L)} \\ E_{o\text{-Licht}} &\sim e^{ikz} = e^{ik(n_o(E)L)} \end{aligned} \quad (254)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta\phi &= [n_e(E) - n_o(E)] kL \\ &= [n_e(0) - n_o(0)] kL - [r_e - r_o] kL \\ &= 2\pi - [r_e - r_o] E kL \end{aligned}$$

Und damit läßt sich die Forderung $\Delta\phi=\pi$ nur verwirklichen, wenn gilt:

$$\pi = [r_e - r_o] E_\pi kL$$
$$E_\pi = \frac{\pi}{[r_e - r_o] kL} = \frac{\lambda}{2 L[r_e - r_o]} \quad (255)$$

E_π ist das E-Feld, das am Kristall angelegt werden muß. Die r_i sind die Materialkoeffizienten des Kristalls.

Eine Änderung der Polarisationsrichtung tritt nur dann auf, wenn das eingestrahlte Licht beide Komponenten, also senkrecht und parallel zur optischen Achse ungleich Null besitzt.

Ein elektrooptischer Schalter ist die schnellste und verlässlichste Art eine Güteschaltung zu realisieren. Die Spannungen die an eine solche *Pockelszelle* angelegt werden müssen liegen im Bereich von 1-5 kV.[3,1]

9.2.3.2.* Kerr Effekt, quadratischer elektrooptischer Effekt

Ähnlich wie beim Pockels-Effekt wird hier ausgenutzt, das Flüssigkeiten mit anisotropen Molekülen beim Anlegen eines E-Feldes doppelbrechend werden (Bsp:Nitrobenzol). Dies passiert dadurch, das sich die Moleküle in einer bestimmten Vorzugsrichtung im E-Feld ausrichten, und dadurch wiederum die Brechzahl verändert wird. Allerdings ist bei diesem Effekt zu beachten, das die Drehung der Polarisationssebene um den Winkel β nicht proportional zur angelegten Spannung ist, sondern deren Quadrat:

$$\beta \sim U^2$$

Eine *Kerr-Zelle* kann wie die *Pockelszelle* mit einem Polarisator in den Strahlengang eingebaut werden. Die Spannungen die an *Kerr-Zellen* angelegt werden müssen liegen deutlich höher, bei $U = 10-20$ kV. Sie haben aber einen entscheidenden Vorteil gegenüber den *Pockelszellen*: Bei den *Pockelskristallen* tritt bei hohen Laserleistungen eine Zerstörung des Kristalls ein, dies ist bei den Flüssigkeiten der *Kerr-Zelle* nicht der Fall. [3,1]

9.2.4. Akustooptischer Modulator (als Q-Switch)

Bei dieser Schalterart wird in einem transparenten Material mittels eines Piezokristalls eine *laufende* Ultraschallwelle erzeugt. Das so entstandene Gebilde aus Wellenbäuchen und Knoten besitzt lokal veränderte Brechzahlen, und kann als optisches Gitter aufgefasst werden. Das Licht im Strahlengang wird nun an diesem Gitter durch Beugung ausgekoppelt. Zur Erzeugung des Pulses schaltet man die Spannung am Piezokristall ab, wodurch die Güte sofort steigt (Tafelbild). [3]

$$n \sim \rho; \text{ Brechungsindex} \sim \text{Dichte}$$

Genauer betrachtet führt eine Dichtemodulation zu einer Brechindexmodulation. Sei Λ die Wellenlänge des akustischen Signals, n der Brechungsindex des Materials (verlustarm, oft Quarz), und λ die Wellenlänge des unter dem Brewsterwinkel eingekoppelten Lichts. Dann gilt die Bragg'sche Beugungsbedingung mit,

$$2 \Lambda \sin \theta = \frac{\lambda}{n}. \quad (256)$$

Der Beugungswinkel θ beträgt in der Praxis einige Grad. Will man kurze Schaltzeiten verwirklichen, so muß der Lichtstrahl in den Kristall fokussiert werden.

9.2.5. Passive Güteschaltung (Siegmann, Weber-Herziger)

Die passive Güteschaltung wird mit sättigbaren Absorbern durchgeführt. Dies sind Gläser, bzw. transparente Materialien, deren Transmissionskoeffizient T von der Intensität des eingestrahlten Lichts abhängt. Die im Glas auftretenden Verluste entsprechen Absorptionsprozessen im Glas, d.h. Anregungen vom Grundniveau auf ein angeregtes Niveau. Für die Anregungen existiert eine Intensität, bei der gleich viele Atome im Grund und angeregtem Zustand sind, die Sättigungsintensität.

Trifft Licht einer geringen Intensität auf den Absorber, so stehen noch genug Atome zur Absorption zur Verfügung. Bei hoher Intensität sind viele Atome im angeregten Zustand, und die Absorptionsfähigkeit ist deutlich verringert. Dies erklärt das Verhalten des Schalters.

Im Strahlengang eines Lasers hat dies praktische Folgen. Durch das Pumplicht wird der Laser wieder angeregt, aber die Verluste am Absorber verhindern Laseraktivität. Das fortwährende Pumplicht sorgt für eine Erhöhung der Verstärkung, sodaß erst die zusätzlichen Verluste kompensiert, und dann überwunden werden. Der Schalter ist damit ausgebleicht und durchlässig, es setzt eine Lichtlawine ein. Wegen ihrer Größe kommt es zu einer starken induzierten Emission,

und die Atome des aktiven Mediums werden schneller ins Grundniveau zurückgeführt, als das Pumplicht sie anregen kann. Man positioniert den Absorber nahe an einem Spiegel, da sich dort hin und rücklaufende Welle überlagern, und so mehr Intensität zur Verfügung steht.

9.2.5.1. Ratengleichung des Absorbers

Eine genauere Beschreibung basiert auf den Ratengleichungen des Absorbers, mit den Absorberniveaus a_1 , a_2 ,

$$d_t N_a = -A \{N_a(t) + N_{a0}\} - 2 \sigma F(t) N_a(t), \quad (257)$$

mit der Inversionsdichte der Absorbermoleküle,

$$N_a = N_{a2} - N_{a1} ; \quad N_{a0} = N_{a1} + N_{a2}.$$

Die Dynamik des Flusses F wird dann durch,

$$\frac{1}{c} d_t F(t) = [\{\sigma(N_2 - N_1)\} + \sigma_a N_a] F(t) - c^{-1} \frac{T}{2L/c} F(t). \quad (258)$$

bestimmt, und das oben beschriebene Verhalten prognostiziert ($N_a < 0$ sei angenommen).

Allgemein läßt sich das anfängliche Flußverhalten durch,

$$\frac{1}{c} d_t F(t) = [\sigma \Delta N(0) - \sigma_a N_{a0} - c^{-1} \Gamma_{\text{Auskoppel}}] F(t).$$

beschreiben. Man definiert jetzt,

$$c^{-1} \Gamma_0 := \sigma \Delta N(0) - \sigma_a N_{a0} - c^{-1} \Gamma_{\text{Auskoppel}},$$

und beschreibt das Verhalten zu etwas späterer Zeit durch,

$$d_t F(t) = \left[\Gamma_0 + \left(\frac{2 \sigma_a^2 N_{a0}}{A_a} - \frac{2 \sigma^2 \Delta N(0)}{\Gamma_0} \right) \right] F(t).$$

Wenn nun $\frac{2 \sigma_a^2 N_{a0}}{A_a} - \frac{2 \sigma^2 \Delta N(0)}{\Gamma_0} > 1$, so liegt ein sog. "second threshold" vor, und der Absorber funktioniert als Q-Switch.

9.2.5.2. Sättigung des Absorbers

Anstatt die zeitliche Dynamik wie in 9.2.5.1. zu betrachten, macht es auch Sinn den Absorber im stationären Fall zu untersuchen. Dann lassen sich Abhängigkeiten von der z -Komponente erkennen.

$$d_z I = - \frac{a}{1 + \frac{I}{I_s}} I(z) \quad (259)$$

$$\int_{I_{\text{ein}}}^{I_{\text{aus}}} \left(\frac{1}{I} + \frac{1}{I_s} \right) dI = - \int_0^L a dz$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{I_{\text{aus}}}{I_{\text{ein}}} + \frac{I_{\text{aus}} - I_{\text{ein}}}{I_{\text{ein}}} = -a L$$

Aus dieser Formel lässt sich der etwas übersichtlichere Ausdruck,

$$\ln \frac{I_{\text{aus}}}{I_{\text{ein}}} = -aL + 1 - \frac{I_{\text{aus}}}{I_{\text{ein}}} \quad (260)$$

herleiten.

9.3. Modenkopplung [2]

9.3.1. Prinzip

In einem optischen Resonator schwingen im einfachsten Fall mehrere Moden gleichzeitig, solange keine bestimmte Frequenz durch Hilfsmittel ausgesucht wird. D.h. der Laser befindet sich im Mehrmodenbetrieb, wobei allerdings keinerlei festdefinierte Phasenbeziehung existiert. Die Intensität eines Ausgangsstrahls erhält man als Addition der Einzelintensitäten der verschiedenen Moden. Wäre es also möglich eine feste Phasenbeziehung zwischen den Moden zu erzielen, so würde die Überlagerung der Einzelintensitäten genau ultrakurze Pulse ergeben.

9.3.2. Aktive Modenkopplung

9.3.2.1. Prinzip der Modenkopplung

Betrachtet man einen herkömmlichen Laser, so schwingt dieser, wie bereits erwähnt auf mehreren Moden. Dieser Effekt wird dadurch verringert, bzw. verhindert, dass modenselektive Elemente in den Resonator eingesetzt werden. Ein solches Bauteil ist beispielsweise ein *Etalon*, eine Art Fabry-Perot Anordnung planparalleler Glassplatten, welche nur bei bestimmten Wellenlängen Transmissionsmaxima aufweist. Kennt man diese Maxima, so kann man sich aus dem durchlaufenden Strahl eine Mode aussuchen. Die Überlagerung mehrerer axialer Moden lässt sich durch

$$E(t) = \sum_m^M \frac{1}{2} \mathcal{E}_m e^{i\varphi_m + i(\omega_0 + m\Delta\omega)t} + \text{c.c.} \quad (261)$$

darstellen. $\Delta\omega$ ist der freie Spektralbereich des Stehwellenresonators,

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{c}{2L}$$

Im Normalfall würde eine statistische Verteilung der Phasen vorliegen, was einer zeitlichen Fluktuation von $I(t)$ gleichkommt. Die Etablierung von festen Modenbeziehungen ist der entscheidene Schritt, z.b.

$$\varphi_m - \varphi_{m-1} = \alpha = \text{const.}; \quad \mathcal{E}_m = \text{const.} \quad (262)$$

Im Gegensatz zum normalen Multimodenbetrieb stehen diese Moden nun in einer festen, durch den Modulator vorgegebenen Phasenbeziehung. Die Gesamtamplitude kann nun als Addition der Einzelamplituden \mathcal{E}_m bestimmt werden, wobei gilt:

$$E(t) = E_0 \frac{\sin\left[\frac{M}{2}(\Delta\omega t + \alpha)\right]}{\sin\left[\frac{\Delta\omega t + \alpha}{2}\right]} e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} + \text{c.c.} \quad (263)$$

Interessant ist allerdings der Term, der die Amplitude beschreibt. Sein Quadrat ergibt die transmittierte Intensität, die im Folgenden für $M=4$ und $M=24$ geplottet ist:

$$P_1 := \text{Plot}\left[\left\{\left(\frac{\sin\left[\frac{4}{2}(3*t+1)\right]}{\sin\left[\frac{3*t+1}{2}\right]}\right)^2\right\}, \{t, 0, 5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{t, "I(t)"}\right];$$

$$P_2 := \text{Plot}\left[\left\{\left(\frac{\sin\left[\frac{24}{2}(3*t+1)\right]}{\sin\left[\frac{3*t+1}{2}\right]}\right)^2\right\}, \{t, 0, 5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{t, "I(t)"}\right];$$

$$\text{Show}[\text{GraphicsArray}\{P_1, P_2\}]$$

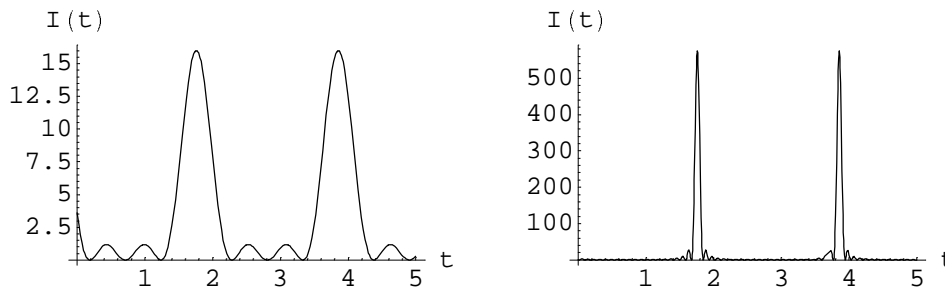


Abb.9.5. Zeitverhalten des Outputs bei Modenkopplung

Allerdings sind normalerweise nicht alle Modenamplituden gleich, wie in (258) angenommen, sondern unterschiedlich. D.h. der entstehende Pulszug beinhaltet starke und schwache Pulse. Je nach Anwendung ist es aber wichtig einen einzelnen Puls aus dem Zug zu nutzen. Dieser kann mit einer Pockelszelle selektiert werden, und zwar in einem ähnlichen Aufbau wie beim Q-Switch, nur das in diesem Fall die Zelle ausserhalb des optischen Resonators angebracht wird.

Der Pulsabstand entspricht der Umlaufzeit im Resonator,

$$t_{N+1} - t_N = \Delta\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu_{\text{FSR}}} = \frac{2L}{c} = \text{Umlaufzeit.} \quad (264)$$

Die Breite eines einzelnen Pulses ergibt sich aus dem Frequenzintervall, das den Pulszug auslöst,

$$\tau_P = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{2\pi}{M\Delta\omega} \quad (265)$$

$\Delta\nu$ ist das Frequenzintervall, in dem Moden anschwingen. Mit Blick auf die Verstärkung werden Medien mit einer großen Verstärkungsbandbreite gefordert.

9.3.2.2. Allgemeine Modenkopplung

Die Wiederholung von Pulsen des zeitlichen Abstandes T führt zu einer axialen Modenstruktur. Jedes zeitlich periodische Signal $E(t)$ lässt sich in der Form,

$$E(t) = \sum_{n=0}^{N-1} E'(t - nT) \quad (266)$$

schreiben. Über eine Fouriertransformation gelangt man in den Frequenzraum, und erhält dort,

$$\begin{aligned} \bar{E}(\omega) &= \sum \int e^{-i\omega t} E'(t - nT) dt = \\ &\sum e^{-in\omega T} \int e^{-i\omega(t-nT)} E'(t - nT) dt = \bar{E}'(\omega) \sum e^{-in\omega T} \end{aligned} \quad (267)$$

Eine Auswertung der Summe ergibt schließlich,

$$|\bar{E}(\omega)|^2 = \left| \bar{E}'(\omega) \right|^2 \left(\frac{\sin TN\omega/2}{\sin T\omega/2} \right)^2. \quad (268)$$

Und für den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ erhält man eine Deltafunktion an der Stelle:

$$\omega_m = \frac{2\pi m}{T} \quad (269)$$

Die Form des Pulses bestimmt die Einhüllende $|\bar{E}'(\omega)|$, so z.B.

$$E'(t) = e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} \Rightarrow \Delta\tau = \text{FWHM} = \tau \sqrt{2 \ln 2}$$

$$E'(t) = e^{-\pi^2 f^2 \tau^2} \Rightarrow \Delta\nu = \text{FWHM} = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\tau\pi}$$

Mit Gausschen Pulsen lässt sich gut rechnen.

9.3.2.3. Dauerstrich gepumpter aktiv modengekoppelter Laser

Ein homogen verbreiteter Laser würde wegen des Gain-clampings normalerweise auf einer (oder wenigen) Moden oszillieren. Der Modulator transferiert Anregung in sonst nicht lasende Moden, die verstärkt werden und von denen ihrerseits durch den Modulator Seitenbänder erzeugt werden. Die Anzahl der beteiligten Moden ist u.a. limitiert durch die endliche Verstärkungsbandbreite.

Im Zeitbild betrachtet, wird ein sich entwickelnder Puls zunächst verkürzt durch die Modulatortransmission. Dem entgegen wirkt das Verstärkermedium, welches eine geringe Frequenzbreite fördert. Wegen der großen spektralen Breite können kurze Pulse nicht gut verstärkt werden. Es entsteht ein gaußförmiger Puls.

In einem modengekoppelten Ringlaser würde der Puls zirkulieren, wobei die Pulsform entlang eines Umlaufs veränderlich sein kann, aber nach einem Umlauf reproduziert werden muß.

9.3.2.4. Akustooptischer Modulator

Wie beim Q-Switch wird hier ein akustisches Element verwendet, allerdings mit dem entscheidenden Unterschied, daß nun eine akustische *Stehwelle* verwendet wird. Von der eingekoppelten E-Welle E_{in} bleibt der ungebeugte Anteil E_{out} übrig, und die gebeugten Strahlen. Somit läßt sich ein Transmissionskoeffizient definieren zu,

$$t'(t) = \frac{E_{out}(t)}{E_{in}(t)}. \quad (270)$$

Die akustische Stehwelle läßt sich als Amplitudenmodulation,

$$t'(t) = 1 - \zeta(1 - \cos 2\Omega t) \quad (271)$$

darstellen. Für eine monochromatische Eingangswelle $E_{in} \sim e^{i\omega t}$ ist

$$E_{out} \sim (1 - \zeta) e^{i\omega t} + \frac{\zeta}{2} e^{i(\omega+2\Omega)t} + \frac{\zeta}{2} e^{i(\omega-2\Omega)t} \quad (272)$$

Die hinteren Terme stehen für die Seitenbänder bei $\omega \pm 2\Omega$. Die Leistung dieser Seitenbänder ist proportional zu ζ^2 .

9.3.2. Passive Modenkopplung

Bei dieser Variante nutzt man statt des Modulators einen sättigbaren Absorber im Resonator. Wird nun mit einer Pulsquelle gepumpt, laufen kurz vor Erreichen des Threshold Fluoreszenzphotonenlawinen durch den Resonator. Da der sättigbare Absorber nichtlineare Sättigungseigenschaften besitzt, wird immer die stärkste dieser Lawinen im Absorber am wenigsten geschwächt. Genau diese Lawine wird dadurch immer größer, unterdrückt die schwächeren und erfährt im aktiven Medium die größte Verstärkung. Man erhält somit einen regulären Pulszug, der bei Fourier-Analyse das Spektrum der Resonatormoden widerspiegelt.

Das Zeitprofil des resultierenden Pulses hängt von den Relaxationszeiten des Absorbermaterials und des aktiven Mediums ab. Um die schwächeren Photonenlawinen effektiv zu unterdrücken wählt man als Absorber meistens Materialien deren Relaxationszeit kürzer ist als die Umlaufzeit im Resonator.[1,3]

Farbstoffe wie Methylenblau, DODCI (Diethyloxadicarocyanin) oder Polymethinpyrylin sind typische sättigbare Absorber, mit Relaxationszeiten von 10^{-9} s bis 10^{-10} s. Man sieht, das bei Farbstofflasern auch im aktiven Medium eine nichtlineare Sättigung möglich ist.

9.3.3. Kerr-Lense Modenkopplung

Bei dieser, relativ neuen Variante nutzt man wieder den Kerreffekt aus, diesmal im aktiven Medium. Trifft ein räumlich z.B. gaußförmiger Puls auf das aktive Medium, so ist der Brechungsindex am größten, wo die Intensität am größten ist. Das heißt rund um den Maximumbereich wird das Licht stark gebrochen, weiter außen weniger. Dies entspricht einer Fokussierung. Setzt man direkt hinter das Medium eine Blende, so wird nur der am stärksten fokussierte Teil des Lichts durchgelassen. Anschaulich entspricht dies einem sättigbaren Absorber. Es entsteht im Frequenzspektrum nun ein sauberes Gaußprofil.

9.4. Ultrakurze Pulse [S1]

Alle bisherigen Verfahren stellen Eingriffe in den optischen Resonator eines einzelnen Lasers dar. Daher ist es sinnvoll, Kombinationen von Methoden zu betrachten, die noch kürzere Pulse erzeugen.

9.4.1. Synchrones Pumpen

Beim synchronen Pumpen nutzt man einen aktiv-modengekoppelten Puls laser als Pumpquelle eines Farbstofflasers. Die Farbstoffsubstanz zeigt, ähnlich wie ein Absorber Sättigungseffekte. Dadurch fällt die Inversion, kurz nachdem sie über den Schwellenwert kommt und Laseremission beginnt, sofort wieder ab. Ein so emittierter Laserpuls ist wesentlich kürzer als der Pumpuls.

9.5. Pulspropagation in dispersiven Medien [1][S1]

9.5.1. Dispersion

Alle Materialien zeigen einen frequenzabhängigen Brechungsindex $n(\omega)$, die Dispersion. Ein normaler Puls propagiert mit der Gruppengeschwindigkeit v ,

$$v = \frac{d\omega}{dk} \quad (273)$$

$$E \sim \mathcal{E} e^{i(\omega t - kz)} \quad (274)$$

nicht zu verwechseln mit der Phasengeschwindigkeit v_{phase} , die für jede Phase unterschiedlich ist. In einem Medium mit Brechungsindex $n(\omega)$ muß der optische Weg berücksichtigt werden, $\beta \equiv n(\omega) k$

$$v = \frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{c} n(\omega)\right)} = \left(\frac{d\left(\frac{\omega}{c} n(\omega)\right)}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (275)$$

Interessant ist vor allem das Zeitverhalten des Pulses. Er wird verbreitert.

$$\begin{aligned} \delta\tau &= L \left(\frac{1}{v\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)} - \frac{1}{v\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)} \right) = \frac{L}{v(\omega)^2} \frac{dv}{d\omega} \Delta\omega \\ &= -L \frac{dv^{-1}}{d\omega} \Delta\omega = -2\pi \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Delta v L \end{aligned}$$

Über diese Gleichung definiert man den Dispersionskoeffizienten D_v ,

$$\begin{aligned} D_v &= 2\pi \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \quad (276) \\ D_v &= \frac{\lambda^3}{c^2} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} = -\frac{\lambda^2}{c} D_\lambda \end{aligned}$$

Man spricht auch von "Group Velocity Dispersion", GVD.

Das zeitliche Auseinanderlaufen nimmt nach

$$\delta\tau = - \frac{D_v L}{2 \Delta\tau} \quad (277)$$

für kürzere Pulse zu. In Glas findet man für $\lambda=800\text{nm}$ $\delta\tau = -16\text{fs}$
 $\left[\frac{L}{1 \text{ cm}} \right] \left[\frac{100 \text{ fs}}{\Delta\tau} \right]$

{siehe auch Graphen im Schillerscript}

9.5.2. Pulspropagation eines Gauß-Pulses

Eine einfache Betrachtung der Propagation eines Pulses, würde anschaulich folgendes Bild ergeben,

$$E = e^{-\Gamma(z-ct)^2}$$

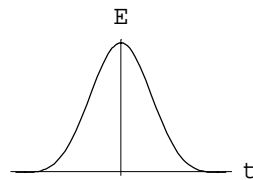
wobei ein Gaußpuls entlang der z-Achse läuft. Natürlich sind z und t über die Geschwindigkeit verknüpft. Man beachte das die allgemeine Gaußkurve einer Funktion f(x) der Form,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}} \quad (278)$$

genügt. Der Normierungsfaktor wird im folgenden weggelassen, und die Abweichung σ , die ja die Breite der Glocke angibt wird über, $\sigma = \sqrt{\Gamma}$ mit Γ bezeichnet.

Zunächst muß ein Anfangspuls vorgegeben werden, in diesem Fall als Beispiel ein Gaußprofil im Zeitraum, und einem periodischen Anteil der Form,

$$E_{in}(z, t) = \mathcal{Re}\left(e^{-\Gamma t^2} e^{-i\omega_0 t}\right),$$



wobei zu dem Gaußterm noch zu sagen ist, das Γ eigentlich die Zeitkonstante darstellt, $\Gamma = \frac{1}{\tau^2}$, und desto kleiner τ , umso schärfer die Verteilung.

Von einem solchen Zeitprofil können wir das Frequenzspektrum mittels Fouriertransformation darstellen,

$$E_{in}[\omega] = \text{FourierTransform}\left[e^{-\Gamma t^2} e^{-i\omega_0 t}, t, \omega\right],$$

$$\Rightarrow E_{\text{in}}(\omega) = \frac{e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4\Gamma}}}{\sqrt{2} \sqrt{\Gamma}}.$$

Im Frequenzraum entsteht ebenfalls ein Gausspaket. Schickt man den Puls durch ein dispersives Medium, so gilt hinter dem Medium,

$$E_{\text{out}}(\omega) \sim e^{-i\beta(\omega)L} e^{-(\omega-\omega_0)^2/(4\Gamma)}.$$

Zurück kommt man mittels Fourierrücktransformation, doch zunächst wird der Phasenfaktor β mit Taylor entwickelt, mit einem $\beta_0 = \beta(\omega_0)$:

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \frac{d\beta}{d\omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2\beta}{d\omega^2}(\omega - \omega_0)^2$$

und mit der Definition von D_v folgt daraus,

$$\beta(\omega) := \beta_0 + \frac{1}{v}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{D_v}{2\pi}(\omega - \omega_0)^2. \quad (279)$$

$$\rightarrow E_{\text{out}}(\omega) = e^{-i\beta_0 L} e^{-i\frac{1}{v}L(\omega-\omega_0)} e^{-i\frac{D_v L}{4\pi}(\omega-\omega_0)^2} e^{-\frac{1}{4\Gamma}(\omega-\omega_0)^2} \quad (280)$$

$$\rightarrow E_{\text{out}}(t, z) = e^{-i\beta(\omega_0)L} e^{-(t-L/v)^2 \Gamma_{\text{out}}} e^{i\omega_0 t} \quad (281)$$

Die Propagationsgeschwindigkeit des Maximums ist v . Für die Linienbreite Γ gilt ein Transformationsgesetz das sich aus einem Koeffizientenvergleich innerhalb von (276) ergibt. So fasst man lediglich die Vorfaktoren des $(\omega - \omega_0)$ Terms zusammen,

$$\frac{1}{\Gamma_{\text{out}}} = \frac{1}{\Gamma} + i \frac{D_v L}{\pi} \quad (282)$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\text{out}} = \frac{\Gamma}{1 + (D_v L \Gamma / \pi)^2} - i \frac{D_v L \Gamma / \pi}{1 + (D_v L \Gamma / \pi)^2} \Gamma \quad (\text{für reelles } \Gamma) \quad (283)$$

Nun kommt man zum eigentlichen Problem zurück, die zeitliche Verbreiterung des Pulses, (man hätte gar nicht mal transformieren müssen). Denn es gilt schließlich, $\Gamma_{\text{out}} = \frac{1}{\tau_{\text{out}}^2}$ und damit kann der Realteil in (279) damit identifiziert werden, wenn man Γ entsprechend auf τ umschreibt,

$$\tau_{\text{out}} = \tau \sqrt{1 + (D_v L \Gamma / \pi)^2} \quad (284)$$

Für die FWHM gilt andererseits,

$$\Delta\tau = \tau \sqrt{2 \ln 2},$$

womit τ_{out} für große Verbreiterungen genähert wird:

$$\tau_{\text{out}} \simeq \left| \frac{D_y L}{\pi \tau} \right| = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\pi} \frac{|D_y| L}{\Delta \tau_{\text{initial}}}$$

Eine solche Verbreiterung wirkt sich dann wie folgt aus:

$$f(t, l) = \text{Exp} \left[\frac{-t^2}{2 * \left(1 + \left(\frac{9 * l}{\pi * 4} \right)^2 \right)} - 0.1 l \right]$$

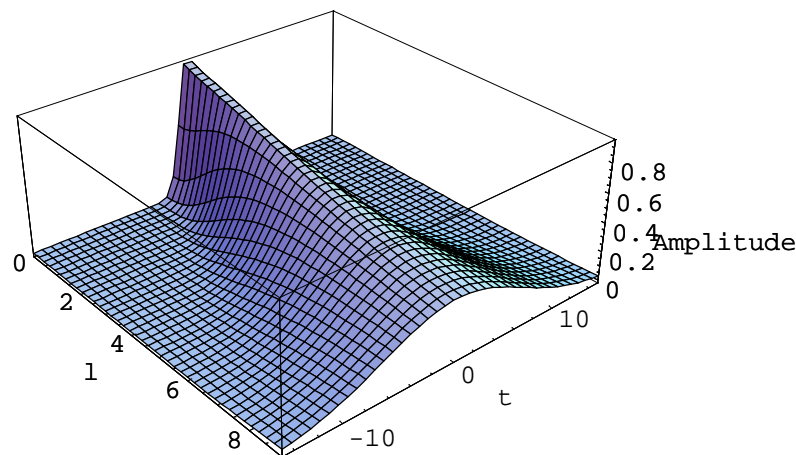


Abb.9.6. Zeitliches Pulszerlaufen entlang einer Strecke l

9.5.3. Dispersionskompensation

Die GVD innerhalb eines Laserresonators wirkt sich pulsverbreiternd aus, d.h. es ist erstrebenswert, diesen Effekt so gering wie möglich zu halten. M.a.W., normalerweise ist die GVD positiv, und nun sucht man ein Bauelement, das eine negative GVD besitzt. Hierfür stehen einige Elemente zur Verfügung.

9.5.3.1. Prismen

Es ist möglich einen Satz von 4 Prismen so zu konfigurieren, das eine negative GVD resultiert.

Das erste Prisma wird unter dem Brewsterwinkel zum Strahl gestellt. Dadurch werden Verluste minimiert. Der Strahl sollte möglichst die Prismenspitze treffen. Durch die Dispersion wird das blaue Licht stärker gebrochen. Rotes und blaues Licht treffen also unter verschiedenen Winkeln auf das zweite Prisma.

Blau und Rot treffen in verschiedenen Höhen auf das zweite Prisma. Der Aufbau ist so gewählt, das blau und rot hinter dem zweiten Prisma parallel laufen. Der Trick liegt darin, das das rote Licht (bzw. eine ganze Wellenlängenverteilung) einen längeren Weg durchs Prismenmaterial zurücklegt, und da dort eine geringere Lichtgeschwindigkeit

vorliegt, wird der rote Strahl verzögert. Durch Verschieben eines Prismas senkrecht zur Grundfläche kann die GVD eingestellt werden.

Anhang A: Literatur

Bücher

[1] Siegman, "Lasers"

[2] Demtroeder, "Laserspectroscopy"

[3] Milonny-Eberly, "Lasers"

[4] Cohen-Tannoudji, "Atom-Photon-Interactions"

[5] Feynman, "Vorlesungen über Physik Bd.III"

[6] Kuypers, "Klassische Mechanik"

[7] Elbaz, "Quantum"

[8] Schwabl, "QMI", "QMII"

Scripte

[S1] Schiller, "Vorlesungskopien & Script"

[S2] Kull, "Script zur Laserphysik", RWTH Aachen

[S3] Luysberg, "Script zum Anfängerpraktikum"